UNIVERSITAT D'ALACANT
Facultat de Ciències
Facultad de Ciencias

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO [2019-2020]

TÍTULO:

DESDE EL PROBLEMA DE BASILEA AL TEOREMA DE APÉRY

AUTOR:

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

Resumen

Uno de los problemas matemáticos más importantes de finales del siglo XVII fue el problema de Basilea, consistente en calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Dicho problema fue resuelto en 1735 por Euler, demostrando ante sorpresa de la comunidad matemática, que el valor que toma dicha serie es $\pi^2/6$. Aún más, en 1748 generaliza el problema y da una expresión cerrada para cada entero positivo k de los valores de la series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

los cuales dependen de potencias de π y de una famosa sucesión numérica conocida como números de Bernoulli.

Los resultados obtenidos por Euler son incuestionáblemente ciertos, pero a pesar de la sencillez de la demostración original, ésta contiene ciertos argumentos erróneos que precisan de técnicas más modernas de análisis matemático para poder considerar la prueba correcta bajo el estándar de rigurosidad de la matemática actual.

La primera parte de este trabajo consiste pues en presentar la prueba de 1735 junto a ciertas herramientas modernas de análisis complejo que permiten justificar rigurosamente los argumentos de Euler y dar pues completa validez a la demostración. También se centra en explicar la generalización de 1748 y los conceptos necesarios para su desarrollo, como por ejemplo, los números de Bernoulli.

La pregunta obvia tras los resultados de Euler es, ¿qué valor toma la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}$$

para k entero positivo?

Actualmente estas series son parte de una función muy estudiada conocida como la función zeta de Riemann que se define para cualquier número complejo s con parte real mayor a uno como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Por tanto, Euler dio una expresión general para $\zeta(2k)$ y nos preguntamos si existe un análogo para $\zeta(2k+1)$.

Desafortunadamente no se conoce, a día de hoy, una expresión cerrada para estos valores. De hecho, no fue hasta 1978, casi tres siglos después de la demostración de Euler, que se hizo un avance significativo con la demostración de Roger Apéry de la irracionalidad de $\zeta(3)$.

En la segunda parte del presente trabajo explicaremos pues la demostración de Apéry que, aunque elemental en los razonamientos empleados es extremadamente compleja en sus detalles, y concluiremos con una breve descripción de los pocos resultados que se conocen para el resto de valores impares (mayores a tres) de la función zeta de Riemann.

[Problema de Basilea, Teorema de Apéry, Análisis Complejo, Teoría de Números]

Abstract

One of the most important mathematical problems of the late 17th century was Basel problem, which consists on finding the sum of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

The problem was solved in 1735 by Euler, proving that the value of the series is $\pi^2/6$. Even more, in 1748 Euler generalizes the problem and he is able to find a closed expresion for every positive integer k of the values of the sums

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

which depend on π and a famous numerical sequence known as Bernoulli numbers.

The results obtained by Euler were, without any doubt, true but despite of the simplicity of the original proof, it contains some wrong arguments that need from modern tools to consider it as a valid mathematical proof.

The first part of this text consists on exposing Euler's 1735 proof with some complex analysis tools that allow us to rigurously justify Euler's arguments. Furthermore, it is also explained the 1748 generalization proof along with some necessary concepts in its development as Bernoulli numbers.

After Euler's results, next obvious question is, what are the values of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}$$

when k is a positive integer?

Nowadays these series are part of a well studied function known as Riemann zeta function which is defined for every complex number s with real part greater than one as

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

So, Euler discovered a general expression for $\zeta(2k)$ and we are trying to find some analogous results for $\zeta(2k+1)$.

Unfortunately no such closed expression is known for this values. In fact, it was not until 1978, almost three centuries after Euler's proofs, that significant progress was made with Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$.

In the second part of this text we will explain Apéry's proof and we will finish it with some known results about the other odd values (greater than three) of Riemann zeta function.

[Basel Problem, Apéry's Theorem, Complex Analysis, Number Theory]

Índice

1. Introducción y contexto histórico

El problema de calcular el valor de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

tiene su origen en el matemático italiano Pietro Mengoli, alumno de Cavalieri (famoso por el principio geométrico que porta su nombre), quien plantea por primera vez esta serie en 1650 en su obra *Novae quadraturae arithmeticae*. Mengoli fue incapaz tanto de demostrar la convergencia como de dar un valor para dicha serie y tras él, exitosos matemáticos como Huygens, Leibniz o Wallis se vieron igualmente desbordados por este problema, siendo únicamente capaces de calcular aproximaciones numéricas.

El primer avance significativo llega de la mano de Jacob Bernoulli, quien demuestra la convergencia de la serie acotándola del siguiente modo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$

donde curiosamente el valor de la última serie era un resultado conocido debido a Mengoli. Con esto, Bernulli no solo demuestra la convergencia de esta serie, pues teniendo en cuenta que para $k \geq 2$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

la convergencia queda demostrada en general para cualquier exponente $k \geq 2$.

Es por estos avances de parte de Jacob Bernoulli y, por la posterior demostración de Euler, que el cálculo del valor de esta serie tomó el nombre de problema de Basilea, pues es el nombre de la ciudad Suiza donde vivía tanto la familia Bernoulli como Euler, siendo de hecho este último estudiante de Johann Bernoulli, hermano menor de Jacob.

Tras los trabajos de Jacob se realizaron pocos avances más allá del cálculo con cada vez mayor precisión del valor de la serie. Sin embargo, éstos estudios no tienen un peso menor pues, debido a la baja velocidad de convergencia de la serie[1], se desarrollaron numerosas técnicas alternativas para calcular su valor. De hecho, la primera aproximación de Euler al problema es con su artículo[2] de 1730 *De summatione innumerabilium progressionum*, donde desarrolla un método completamente novedoso mediante el cuál es capaz de calcular

[1] La suma de los 10000 primeros términos en la serie tan solo proporciona una aproximación correcta en los tres primeros decimales.

[2] En la época era común que los trabajos científicos fueran presentados ante la academia previo a

los 6 primeros decimales del valor de la serie y que más adelante conseguiría mejorar hasta obtener 17 decimales correctos. Los detalles sobre este método pueden consultarse en [32] o en el propio artículo de Euler [13].

Poco después, en 1735, Euler enuncia en la Academia de San Petesburgo su demostración del problema de Basilea con su artículo más famoso, *De summis serierum reciprocarum*, el cual será publicado en 1740. Esta demostración catapultó a Euler a la fama y demostró su grandísima intuición y genialidad matemática. Veamos pues en lineas generales la demostración de Euler, la cual se puede consultar con más detalle en [21], [32] o [33], donde se realiza una muy buena exposición de los detalles del artículo original [14].

En su demostración, Euler parte de la expresión del seno en serie de potencias, un resultado ya conocido en la época, y que tras dividir por x toma la forma

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

Conociendo entonces que el seno se anula únicamente en πz con $z \in \mathbb{Z}$, la genialidad de Euler proviene de considerar la serie de potencias anterior como un polinomio de grado infinito y expresarla pues en función de sus raíces como si de un polinomio real se tratara.

Recordemos brevemente que dado un polinomio expresado como

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

donde las raíces no son nulas, es

$$P(0) = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

y se puede expresar el polinomio como

$$P(x) = P(0)\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

Bajo esta idea, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Euler tomó este factor inicial como la unidad y obtuvo

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

su publicación. Durante esta sección, para tener una mejor idea de la cronología de los acontecimientos se ha optado por señalar la fecha de presentación pudiéndose consultar la fecha de publicación en las referencias.

A partir de esta expresión se observa que los coeficientes de x^2 en la expresión anterior serán

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\cdots=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

y comparando con el coeficiente de x^2 en la serie de potencias obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Este resultado es correcto y no cabe duda de la genialidad de Euler, sin embargo, aunque la expansión como producto infinito de la función seno que dio Euler también es correcta, sus argumentos no lo son, pues para empezar, existen funciones distintas con los mismos ceros, como por ejemplo la función $e^x\frac{\sin(x)}{x}$, las cuales claramente no pueden tener la misma expresión como producto. Ante estos argumentos en contra de su prueba, Euler se defendía argumentando que los valores que se obtenían como aproximaciones para la serie y para $\frac{\pi^2}{6}$ eran muy similares, aunque sabía que las objeciones eran acertadas y por ello da en 1741 una demostración alternativa mediante el uso de integrales [15]. Más adelante, en su obra *Introductio in analysin infinitorum* escrita en 1745, Euler da una demostración más elaborada de la expresión como producto infinito de la función seno [16, §158] utilizando números complejos, pero sigue careciendo aún del rigor necesario para considerarlo una demostración acertada y de hecho, tuvo que pasar más de un siglo hasta encontrarse una demostración rigurosa gracias a los estudios de Weierstrass y Hadamard sobre funciones analíticas.

Tenemos pues que a mediados del siglo XVIII Euler cuenta con varias demostraciones para el problema de Basilea y, sin embargo, su conexión con el problema no acaba aquí pues en 1748 da en [17] una expresión cerrada para cualquiera de las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$$

donde k es un número natural, la cuál veremos más adelante.

Actualmente a las series anteriores se las conoce como los valores enteros positivos de la función zeta de Riemann, que se define para cualquier número complejo con parte real mayor a uno como

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Por tanto, con lo mencionado anteriormente tenemos que Euler dió un valor para $\zeta(2k)$ donde k es natural, es decir, se conoce una forma cerrada para ζ evaluada en cualquier entero positivo par, y la pregunta obvia es, ¿qué ocurre con los valores impares?

Por desgracia, la respuesta a esta pregunta sigue sin estar resuelta y de hecho estos valores supusieron por más de 300 años una completa incógnita para los matemáticos, no solo en su valor, si no también en sus propiedades, hasta que en 1978 Roger Apéry consiguió demostrar que $\zeta(3)$ es irracional. Tras los trabajos de Apéry, se han hecho ciertos avances y conocemos algunos resultados parciales para el resto de valores, sin embargo, para cualquier impar k mayor a 3, las propiedades concretas de $\zeta(k)$ siguen suponiendo una incógnita tan profunda como lo era el problema de Basilea antes de la aparición de Euler.

2. Productos infinitos y funciones enteras

El teorema fundamental del álgebra nos permite asegurar que si tenemos un polinomio de la forma $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, entonces tendrá n raíces complejas $z_1, \cdots, z_n$ (posiblemente algunas repetidas) y podemos expresar

$$p(z) = a_n(z - z_1)\cdots(z - z_n)$$

Estos resultados eran conocidos para Euler y, como ya hemos comentado, los utilizó sobre la expansión en serie de potencias de la función seno, lo que podríamos considerar un polinomio de “grado infinito”, para expresar ésta última como un producto de sus raíces, análogamente a lo que hemos hecho con el polinomio anterior.

Sorprendentemente, la fórmula que obtuvo era correcta y resulta aún más sorprendente que, para funciones que se comportan de forma “parecida” a los polinomios, es decir, que tienen un desarrollo en serie en todo el plano complejo, Weierstrass demostrara un siglo después que efectivamente es posible expresarlas, en cierto modo, en función del producto de sus raíces.

En esta sección daremos pues un breve repaso a esta rama del análisis complejo que estudia las funciones descritas anteriormente, que se conocen como funciones enteras, junto a su factorización como producto de sus raíces, y sentará las bases para las siguientes secciones en las que responderemos a las preguntas que previamente hemos planteado. Demostraciones a todos los resultados que se enunciarán pueden hallarse en la mayoría de libros de análisis complejo, en particular, los consultados para la elaboración de la sección han sido [5], [7], [11], [18] y [35].

El primer concepto que debemos introducir será pues el de producto infinito que, análogamente a lo que se hace al extender las sumas a un número infinito de sumandos, se define como sigue.

Definición 2.1. *Sea* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos y definamos la sucesión de productos parciales*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$$

Diremos que el producto infinito asociado a $\{z_k\}$

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k$$

converge si la sucesión de productos parciales lo hace.

Observemos que si $z_{k_0} = 0$ para algún $k_0 \geq 1$ entonces todo producto parcial P_n con $n \geq k_0$ será nulo y, por tanto, el producto infinito será nulo independientemente del comportamiento del resto de términos en la sucesión original. Esto, sin embargo, no supondrá un problema pues solo implica que ante la aparición de ceros en una sucesión $\{z_k\}$ su producto infinito es trivial y se estudian en detalle únicamente aquellos casos en los que no se da esta situación.

Bajo esta linea, observemos que si es $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos y su producto converge también a un valor no nulo, entonces tenemos que

$$z_n = \frac{z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n}{z_1 z_2 \cdots z_{n-1}} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Luego, para productos no triviales, hemos demostrado la siguiente condición necesaria de convergencia análoga a la conocida para series.

Proposición 2.1. *Sea* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos no nulos, si su producto infinito converge a un valor no nulo, entonces la sucesión* $\{z_k\}$ *converge a uno.*

Una de las preguntas más naturales que pueden surgir al trabajar con productos es, si mediante el uso de logaritmos, podríamos convertir estos productos en sumas con las cuales es usualmente más sencillo trabajar y efectivamente, el siguiente resultado nos confirma la sospecha.

Teorema 2.2. *Sea* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos no nulos, entonces su producto infinito converge a un elemento no nulo si, y solo si, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Log(z_k)$$

converge, siendo $Log(z)$ *el logaritmo principal.*

Un caso particular cuyo estudio resulta interesante es el caso de sucesiones de números reales no negativos, donde establecer la convergencia resulta mucho más fácil tal como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Sea* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales no negativos, se cumple entonces que el producto infinito*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$$

converge si, y solo si, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

converge.

El importante valor de este resultado incluso en el estudio de productos de números complejos proviene del siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sea* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos, distintos de* -1*, si el producto infinito*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+|z_k|\right)$$

converge, entonces

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z_k\right)$$

también converge, y lo hace a un valor no nulo.

Este teorema justifica la definición de convergencia absoluta de un producto $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z_k\right)$ como la convergencia de $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+|z_k|\right)$ y nos permite reformular el teorema anterior de forma análoga al resultado para series estableciendo que si un producto converge absolutamente entonces converge.

Antes de pasar ya a establecer el importante papel que juegan los productos infinitos en el estudio de las funciones enteras, conviene mencionar que existe un resultado análogo al teorema de reordenación de series que nos permite reordenar los términos en un producto infinito de la manera que nos resulte más cómoda.

Teorema 2.5. *Sea* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos y* $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z_k\right)$ *un producto absolutamente convergente, entonces para cualquier permutación* $\sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ *se tiene que el producto* $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z_{\sigma(k)}\right)$ *también converge y lo hace al mismo límite.*

Estamos ya listos para enunciar uno de los resultado principales y más importantes que relaciona los productos infinitos y las funciones analíticas.

Teorema 2.6. *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ converge uniformemente en los compactos de Ω, entonces el producto $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + f_k(z))$ converge absolutamente en Ω y uniformemente en sus compactos.*
Así,

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + f_k(z))$$

es una función analítica en Ω tal que $f(z) = 0$ si, y solo si, existe un $k \geq 1$ tal que $f_k(z) + 1 = 0$.
Además, si $f(z) \neq 0$ entonces se cumple la fórmula de derivación logarítmica, es decir,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{1 + f_k(z)}$$

donde la convergencia es uniforme en un entorno compacto del punto z.

Observemos además que los productos parciales $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 + f_k(z))$ son también funciones analíticas que, bajo las condiciones del teorema, convergen uniformemente a f en los compactos de Ω. Por tanto, sabemos también que sus derivadas $P_n^{(m)}$ convergen uniformemente en los compactos de Ω a $f^{(m)}$ [5, Tma. 2.2.17].

A continuación, introduciremos una sucesión de funciones enteras que harán el papel de los monomios $(z - z_k)$ en el caso de los polinomios, para la factorización de funciones enteras.

Definición 2.2. *Dado m un entero no negativo se define el factor elemental de orden m como la función entera E_m dada por*

$$E_m(z) = \begin{cases} 1 - z & si \quad m = 0 \\ \\ (1 - z)e^{H_m(z)} & si \quad m > 0 \end{cases}$$

donde

$$H_m(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{k}$$

Con todo lo visto, ya tenemos todos los ingredientes necesarios para enunciar el teorema de factorización que Weierstrass sin embargo, como veremos, la siguiente definición dota al teorema de una mayor potencia.

Definición 2.3. *Sea* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos no nulos tal que* $|a_k|$ *diverge a infinito*[3]*, se define el exponente de convergencia de la sucesión,* μ*, como*

$$\mu = \inf\left\{p > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^p} < \infty\right\}$$

Si el conjunto anterior es vacío, decimos que el exponente de convergencia de la sucesión es infinito.

Ahora sí, podemos enunciar ya el prometido teorema de factorización publicado por Weierstrass en 1876 en [39].

Teorema 2.7. (Teorema de factorización de Weierstrass) *Sea* f *una función entera, no idénticamente nula, tal que tiene un cero en* $z = 0$ *de orden*[4] m *y sea el conjunto de sus ceros no nulos,* $\bar{Z}(f)$*, infinito. Entonces, si consideramos la sucesión* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *formada con todos los elementos de* $\bar{Z}(f)$ *de modo que cada cero aparece repetido tantas veces en la sucesión como indica su multiplicidad, se cumple que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

donde g *es una función entera y* $\{m_k\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de enteros no negativos.*
Además, si μ *es el exponente de convergencia de la sucesión de ceros* $\{a_k\}$ *y es finito, se tiene que para cualquier entero no negativo* h*, tal que* $h > \mu - 1$ *se cumple que*

$$f(z) = e^{\bar{g}(z)} z^m \prod_{k=1}^{\infty} E_h\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

siendo $\bar{g}$ *también una función entera.*
Aún más, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\mu}}$ *converge y* μ *es un número natural, podemos tomar* $h = \mu - 1$.
En cualquiera de los casos, la convergencia del producto involucrado es absoluta en $\mathbb{C}$ *y uniforme en cualquier conjunto compacto del plano complejo.*

Antes de continuar, cabe decir que al ser f una función entera no nula, el conjunto de sus ceros $Z(f)$ debe ser a lo sumo numerable pues, en caso contrario, tendrá un punto de acumulación y, por el principio de identidad [11, Tma 3.7, Cap. IV], f sería idénticamente

[3] Observemos que esta condición se impone pues si los módulos de a_k no divergen a infinito, entonces la sucesión $|a_k|^{-p}$ no converge a cero para ningún $p > 0$ y por tanto, la serie planteada nunca converge.

[4] Si f no tiene un cero en $z = 0$ simplemente consideramos $m = 0$.

nula. Por tanto, si $Z(f)$ es infinito, entonces será numerable, en particular $Z(f) \setminus \{0\}$ lo es, y podemos formar la sucesión $\{a_k\}$ dicha en el teorema[5].

Además, como el teorema nos asegura que para cada $z \in \mathbb{C}$ la convergencia del producto infinito es absoluta, en virtud del teorema 2.5, tenemos que no importa el orden en que tomemos los ceros para formar la sucesión, siempre que incluyamos todas las multiplicidades de cada uno de ellos.

Es importante también destacar que al exigir en el teorema que sea $\bar{Z}(f)$ infinito, tenemos que al formar la sucesión $\{a_k\}$ sus módulos divergen a infinito, luego tiene sentido hallar su exponente de convergencia. Esta divergencia no es más que otra aplicación del principio de identidad pues, en caso de no ser los módulos de $\{a_k\}$ divergentes, tendríamos que $\bar{Z}(f)$ está acotado luego, contenido en alguna bola cerrada K (que es claramente compacta), y por la propiedad de Bolzano-Weierstrass $\bar{Z}(f)$ tendrá al menos un punto de acumulación en K, de donde f es idénticamente nula en K. Al ser K cualquier bola cerrada que contenga a $\bar{Z}(f)$, concluimos que f es idénticamente nula en $\mathbb{C}$, lo cual supone una contradicción.

Como es claro, este teorema nos da en cierto modo el análogo a la factorización de polinomios y, en el caso de funciones cuyos ceros tengan un exponente de convergencia finito, nos permite incluso dar una expresión cerrada para el producto salvo, la función g que puede ser bastante complicada de identificar. Sin embargo, años después a la publicación de Weierstrass, Hadamard demostró que, para cierto tipo de funciones enteras, g es un polinomio con grado máximo conocido. Este tipo de funciones son las funciones enteras de orden finito, donde el orden de una función determina, en cierto modo, como de parecida es una función a la función exponencial respecto a su crecimiento y lo podemos definir como sigue.

Definición 2.4. *Sea f una función entera, no constante, decimos que f es de orden finito si existe un número positivo ρ y ciertas constantes $A, B > 0$ tal que*

$$|f(z)| < Ae^{B|z|^\rho}, \forall z \in \mathbb{C}$$

Si f es de orden finito, denominaremos orden de f a

$$\lambda = \inf \left\{ \rho > 0 : \exists A, B > 0 \text{ tal que } |f(z)| < Ae^{B|z|^\rho}, \forall z \in \mathbb{C} \right\}$$

[5] Podemos expresar $Z(f) \setminus \{0\} = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ y si la multiplicidad de cada b_n es m_n, definiendo $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$, podemos formar las funciones $p_n : \{S_{n-1}+1, \cdots, S_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por $p_n(k) = b_n$ y así una forma de construir la sucesión deseada es tomar $a_k = p_n(k)$ siendo n el único natural tal que $k \in \{S_{n-1}+1, \cdots, S_n\}$.

Con esto, estamos ya en condiciones de enunciar el teorema de factorización de Hadamard, que resulta muy útil para hallar la expresión de ciertas funciones en forma de producto.

Teorema 2.8. (Teorema de factorización de Hadamard) *Sea f una función entera, no constante, de orden finito λ, que tiene un cero en $z = 0$ de orden m y tal que el conjunto de sus ceros no nulos, $\bar{Z}(f)$, es infinito. Entonces, si consideramos la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ formada con todos los elementos de $\bar{Z}(f)$ de modo que cada cero aparece repetido tantas veces en la sucesión como indica su multiplicidad, se cumple que μ el orden de convergencia de $\{a_k\}$ es menor o igual a λ el orden de la función y, si tomamos h el menor entero no negativo*[6] *tal que $h > \mu - 1$ entonces*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k=1}^{\infty} E_h\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

donde g es un polinomio de grado menor o igual a λ.
Además, la convergencia del producto involucrado es absoluta en $\mathbb{C}$ y uniforme en cualquier conjunto compacto del plano complejo.

3. La función $\sin(\pi z)$ en forma de producto infinito

En esta sección veremos que empleando los resultados de la sección previa se puede demostrar que la fórmula que dio Euler para el desarrollo como producto infinito de la función seno es correcta en el sentido de convergencia de la matemática moderna. Además veremos una justificación para la comparación de coeficientes entre la expresión del producto infinito y la serie de Taylor de $\frac{\sin(z)}{z}$ lo que permite validar, sin ninguna discusión, la solución al problema de Basilea dada por Euler en 1735.

Antes de comenzar, cabe destacar que existen otras formas, tal vez más sencillas, de justificar rigurosamente la demostración de Euler[7] pero en este trabajo hemos optado por utilizar los resultados de factorización de funciones enteras porque son la justificación a la idea de Euler de tratar la función seno como un polinomio y expresarla como un producto infinito de sus raíces.

Trabajaremos a lo largo de la sección con la función $\sin(\pi z)$ pues, como veremos, es mucho más fácil operar con ella, y es claro que no supone una pérdida de generalidad

[6] Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{\mu}}$ converge y μ es un número natural, entonces $h = \mu - 1$

[7] Puede consultarse por ejemplo [18, Prop. IV 1.11] donde se emplea la función Γ y la fórmula de reflexión de Euler para dar la expansión en producto infinito del seno.

pues bastaría tomar $z = \frac{w}{\pi}$ para cualquier $w \in \mathbb{C}$ en las fórmulas que obtengamos para tener el caso particular de la función seno.

Así, sea $f(z) = \sin(\pi z)$ entonces por definición,

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

y con ello,

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 0 \Leftrightarrow e^{2\pi iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\pi iz = 2\pi ik,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Además, $f'(z) = \pi\cos(\pi z)$ y con un procedimiento análogo al anterior, tenemos que $f'(z) = 0$ si, y solo si, $z = k + \frac{1}{2}$ con k un entero, por lo que todos los ceros de f son simples, y se anula pues en 0 y en la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ dada por

$$\left.\begin{array}{l} a_{2k} = -k \quad \forall k \geq 1 \\ \\ a_{2k-1} = k \quad \forall k \geq 1 \end{array}\right\}$$

Ahora, observemos que dado $p > 0$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{|a_k|^p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|a_{2k-1}|^p} + \frac{1}{|a_{2k}|^p} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^p}$$

con lo que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^p}$ converge si, y solo si, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge y por el lema 9.4 tenemos que ésta última serie converge si, y solo si, $p > 1$. Con todo, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^p}$ converge si, y solo si, $p > 1$ y así, el exponente de convergencia de $\{a_k\}$ será $\mu = 1$.

Ahora, respecto al orden de f, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{2}\left|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|e^{i\pi z}\right| + \left|e^{-i\pi z}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Re}(i\pi z)} + e^{\mathrm{Re}(-i\pi z)}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left(e^{|i\pi z|} + e^{|-i\pi z|}\right) = e^{\pi|z|} \end{aligned}$$

con lo que si es λ el orden de f, será $\lambda \leq 1$ pero, por otro lado, sabemos que $\lambda \geq \mu = 1$ y así concluimos que el orden de f es uno.

Con todo, por el teorema de factorización de Hadamard (Tma 2.8), existe g un polinomio de grado menor o igual a uno tal que

$$f(z) = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

siendo

$$E_1\left(\frac{z}{a_k}\right) = \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k}$$

Ahora, observemos que fijado $z \in \mathbb{C}$, si denotamos por

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} E_1\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

entonces

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{z/a_k} = \prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\prod_{k=1}^{2n} e^{z/a_k}$$

y como

$$\prod_{k=1}^{2n} e^{z/a_k} = \exp\left(z\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k}\right) = \exp\left(z\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{2k-1}}+\frac{1}{a_{2k}}\right)\right) = \exp\left(z\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\right)\right) = 1$$

y

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_{2k-1}}\right)\left(1-\frac{z}{a_{2k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{k}\right)\left(1+\frac{z}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

concluimos que

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

Entonces, por un lado, tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} P_{2n} = \lim_{n\to+\infty} P_n = \prod_{k=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

pero, por otro lado

$$\lim_{n\to+\infty} P_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

con lo que finalmente concluimos que

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

Así, si es $g(z) = a + bz$ tendremos que

$$\sin(\pi z) = e^{a+bz} z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

y resta pues hallar los valores de a y b.

En primer lugar, tenemos que

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z} = \lim_{z\to 0}\pi\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \pi$$

y así

$$\pi = \lim_{z\to 0} e^{a+bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Como sabemos que el producto infinito en la expresión anterior converge uniformemente en cualquier bola cerrada centrada en cero, por [37, Prop. 3.3.3] tenemos que

$$\pi = \lim_{z\to 0} e^{a+bz} \prod_{k=1}^{\infty} \lim_{z\to 0} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = e^a$$

y en resumen,

$$\sin(\pi z) = e^{bz} \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Por último, como $\sin(\pi z)$ es impar,

$$-e^{bz}\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = -\sin(\pi z) = \sin(-\pi z) = -e^{-bz}\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

y, como si denotamos por B la bola abierta de radio $1/2$ centrada en $1/2$, se cumple que

$$\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{e^{bz}} \neq 0, \forall z \in B$$

tenemos que

$$e^{bz} = e^{-bz}, \forall z \in B$$

luego

$$e^{2bz} = 1, \forall z \in B$$

y derivando obtenemos que para cualquier z en esta bola es $2be^{2bz} = 0$ y, como la función exponencial no se anula en $\mathbb{C}$, concluimos que $b = 0$.

Finalmente, tenemos pues que

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

lo que prueba la validez de la fórmula hallada por Euler.

Por último, veamos como podemos comparar este producto infinito con la expansión en serie de potencias de la función seno para obtener el valor de $\zeta(2)$ tal como Euler lo halló.

En primer lugar, si denotamos los productos parciales

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

veamos que es posible expresar

$$P_n(z) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) z^2 + z^4 \bar{P}_n(z)$$

donde $\bar{P}_n$ es un polinomio de grado $2n-4$ para todo $n \geq 2$.

Esto es fácil pues es cierto para $n = 2$ ya que

$$P_2(z) = \left(1 - z^2\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2}\right) z^2 + z^4 \left(\frac{1}{4}\right)$$

y, basta tomar $\bar{P}_2(z) = \frac{1}{4}$.
Además, si lo suponemos cierto para n, entonces

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) = P_n(z) \left(1 - \frac{z^2}{(n+1)^2}\right) &\underset{\text{(HI)}}{=} \left(1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) z^2 + z^4 \bar{P}_n(z)\right) \left(1 - \frac{z^2}{(n+1)^2}\right) = \\ = 1 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right) z^2 + z^4 &\underbrace{\left(\bar{P}_n(z) + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{z^2}{(n+1)^2} \bar{P}_n(z)\right)}_{\bar{P}_{n+1}(z)} \end{aligned}$$

y, como por hipótesis de inducción, $\bar{P}_n(z)$ es un polinomio de grado $2n-4$, es claro que $\bar{P}_{n+1}(z)$ es un polinomio de grado $2(n+1)-4$ y concluimos.

Ahora, y puesto que lo necesitaremos más adelante, observemos que si denotamos por $f_k(z) = -\frac{z^2}{k^2}$, tenemos que dado $K \subset \mathbb{C}$ compacto, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{k^2}$$

converge uniformemente en K.
Esto es así pues, como K es compacto, estará acotado y existe pues un cierto $M > 0$ tal que $|z| < M$ en K, de donde

$$\frac{|z|^2}{k^2} \leq \frac{M^2}{k^2}$$

para cada $k \geq 1$ y $z \in K$ y, como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^2}{k^2}$ converge, por el test-M de Weierstrass, obtenemos el resultado deseado.

Así, podemos aplicar el teorema 2.6 a

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

y por la observación posterior a dicho teorema tendremos que P_n'' converge a P'' en cualquier compacto que contenga al cero.
Con lo visto,

$$P_n''(z) = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + z^2 \left(12\bar{P}_n(z) + 8z\bar{P}_n'(z) + z^2\bar{P}_n''(z)\right)$$

y en particular,

$$P''(0) = \lim_{n\to+\infty} P_n''(0) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Ahora, como

$$P(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

y es conocido que el desarrollo en serie de Taylor de la función $\frac{\sin(z)}{z}$ es

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

tenemos finalmente[8] la comparación hecha por Euler

$$-\frac{2\pi^2}{3!} = P''(0) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

y así,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

[8]Observemos que por un lado, la serie de Taylor de P centrada en $z = 0$ será

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

y, por otro,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)!} z^{2k}$$

luego por la unicidad de los coeficientes,

$$P''(0) = 2!\frac{-\pi^2}{3!}$$

4. Polinomios y números de Bernoulli

Visto el valor de $\zeta(2)$, siguiendo a Euler, el siguiente paso será calcular el valor de $\zeta(2k)$ para cualquier natural k.

El prodecimiento mediante el cuál hallaremos estos valores será el mismo que dió Euler en [17] sin embargo, precisamos antes estudiar dos herramientas que serán necesarias para la demostración.

En esta sección veremos la primera de ella, los números de Bernouilli, cuyo origen se remonta a Jacob Bernoulli, importante matemático del siglo XVII ya mencionado en la introducción. Esta sucesión numérica es muy importante en numerosas ramas de las matemáticas que van desde la combinatoria al análisis y como veremos, una pieza fundamental en la resolución de nuestro problema. Tras definirlos, debido al poco esfuerzo extra que supone, definiremos también unos polinomios asociados a estos números que nos permitirán demostrar el resultado original en el que Jacob Bernoulli estaba trabajando cuando los descubrió que, aunque sea un tema tangencial a la finalidad del texto, su propia belleza merece el tiempo adicional dedicado al estudio de esta fascinante sucesión.

Sea $t \in \mathbb{R}$ y definamos la aplicación $f_t : B(0, 2\pi) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_t(z) = \begin{cases} \dfrac{ze^{tz}}{e^z - 1} & si \quad z \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Observemos que f_t es analítica en la bola perforada $B^*(0, 2\pi)$ pues tanto ze^{tz} como $e^z - 1$ son analíticas y ésta última no se anula en dicho abierto.
Además, aplicando la regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{z\to 0} f_t(z) = \lim_{z\to 0} \frac{ze^{tz}}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{tz}(1 + tz)}{e^z} = 1$$

con lo que f_t es continua en $B(0, 2\pi)$.
Así, concluimos que la función es analítica en dicha bola y por [5, Tma. 2.2.16] podemos expresar

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_t^{(n)}(0)}{n!} z^n, \forall z \in B(0, 2\pi)$$

Consideremos ahora el caso particular de $g \equiv f_0$, es decir,

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & si \quad z \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Entonces g es una función analítica que no se anula en la bola dada, luego podemos definir $h(z) = 1/g(z)$ y ésta será también una función analítica en $B(0, 2\pi)$.

Observemos ahora que dado $z \in B^*(0, 2\pi)$ como

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

podemos expresar

$$h(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

y como hemos visto que h es analítica en toda la bola, por la unicidad del desarrollo en serie de potencias de las funciones analíticas, tendremos que

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \forall z \in B(0, 2\pi)$$

Con todo, por el lema 9.2 tenemos que

$$\begin{aligned} g(z) =& \frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} d_{n-k} \right] z^n = \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} d_{n-k} \right] \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \tag{1}$$

y estamos preparados para dar la primera definición importante.

Definición 4.1. *Se define el n-ésimo número de Bernoulli, B_n, como el n-ésimo coeficiente en el desarrollo de Taylor (en torno a $z = 0$) de la función*

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & si \quad z \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

La definición dada no es práctica pues el cálculo de estos números pasaría por calcular las derivadas de g en $z = 0$ donde ni si quiera podemos aplicar las reglas usuales de derivación y no tendríamos más remedio que emplear la propia definición de derivada, sin embargo, todo el desarrollo previo nos facilita una manera recursiva de calcularlos.

Así, de (1) podemos deducir por un lado que

$$B_n = n! d_n, \forall n \geq 0 \tag{2}$$

luego $B_0 = 1$, pero también tenemos por dicha expresión que, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} B_n =& -n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} d_{n-k} \underset{(2)}{=} -n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k+1)!} B_k = \\ =& -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n-k+1} \end{aligned}$$

Es decir, obtenemos para los números de Bernouilli la siguiente fórmula recursiva:

$$\left. \begin{aligned} & B_0 = 1 \\ & B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n-k+1}, \forall n \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

Retomando ahora la función f_t definida al comienzo de la sección, observemos que sin más que utilizar el lema 9.3 tenemos que

$$\begin{aligned} f_t(z) =& g(z) e^{tz} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} \frac{B_n}{n!} \frac{t^{k-n}}{(k-n)!} \right] z^k = \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} B_n t^{k-n} \right] \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

y de modo análogo a la definición para los números de Bernouilli, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2. *Se define el n-ésimo polinomio de Bernoulli evaluado en $t \in \mathbb{R}$, $B_n(t)$, como el n-ésimo coeficiente en el desarrollo de Taylor (en torno a $z = 0$) de la función*

$$f_t(z) = \begin{cases} \dfrac{z e^{tz}}{e^z - 1} & si \quad z \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k}$$

donde observemos que $B_n(0) = B_n$.

Antes de estudiar el resultado final prometido, veamos algunas propiedades básicas que serán útiles para demostrar la generalización del problema de Basilea que buscamos.

Proposición 4.1. *Se cumplen:*

I) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \forall n \geq 2$

II) $B_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$

III) $B_n'(t) = nB_{n-1}(t), \forall n \geq 1$

IV) $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}, \forall n \geq 1$

V) $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t), \forall n \geq 0$

<u>Demostración:</u>

I) Como

$$z = g(z)(e^z - 1), \forall z \in B(0, 2\pi)$$

y tanto z, como $g(z)(e^z-1)$ son analíticas, derivando n veces en la expresión anterior (con $n \geq 2$) obtenemos

$$0 = [g(z)(e^z-1)]^{(n)} \underset{\text{Lema 9.1}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(z)(e^z-1)^{(n-k)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g^{(k)}(z) e^z + g^{(n)}(z)(e^z - 1)$$

Por tanto, evaluando la expresión para $z = 0$ y teniendo en cuenta que $B_n = g^{(n)}(0)$ para cada $n \geq 0$ concluimos que efectivamente

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

II) Sabemos que

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \forall z \in B(0, 2\pi) \tag{3}$$

y como si $z \in B(0, 2\pi)$ entonces $-z \in B(0, 2\pi)$ se cumple también que

$$g(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{k!} z^k, \forall z \in B(0, 2\pi) \tag{4}$$

Ahora, observemos que si es $z \neq 0$

$$g(-z) - g(z) = \frac{-z}{e^{-z}-1} - \frac{z}{e^{z}-1} = \frac{-ze^{z} + z - ze^{-z} + z}{(e^{-z}-1)(e^{z}-1)} = \frac{z(2 - e^{z} - e^{-z})}{2 - e^{z} - e^{-z}} = z \tag{5}$$

y, como es claro que la igualdad anterior es también cierta para $z = 0$, por (3), (4) y (5) tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{k!} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k - 1\right) \frac{B_k}{k!} z^k = -2B_1 z - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = -\left(B_1 + \frac{1}{2}\right) z \tag{6}$$

Pero, por la relación recursiva que hallamos tenemos que

$$B_1 = -\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} \frac{B_k}{1-k+1} = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2}$$

y sustituyendo en (6) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = 0, \forall z \in B(0, 2\pi)$$

y por la unicidad del desarrollo en serie de potencias, concluimos que $B_{2n+1} = 0$ para cada $n \geq 1$.

III) Por la propia definición y teniendo en cuanta la nota al pie[9] es claro que

$$B_n'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) B_k t^{n-k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-k) B_k t^{(n-1)-k} = n B_{n-1}(t)$$

IV) Observemos que para $z \in B^*(0, 2\pi)$ (nuevamente se puede ver facilmente que la siguiente expresión también es cierta para $z = 0$)

$$f_{t+1}(z) - f_t(z) = \frac{ze^{tz}}{e^{z}-1} e^{z} - \frac{ze^{tz}}{e^{z}-1} = \frac{ze^{tz}}{e^{z}-1}(e^{z} - 1) = ze^{tz}$$

[9] $n\binom{n-1}{k} = n\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k) = \binom{n}{k}(n-k)$

y como

$$f_{t+1}(z) - f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t+1)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n \underset{B_0(t)=B_0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t+1) - B_n(t)}{n!} z^n$$

y

$$ze^{zt} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} z^n$$

por la unicidad del desarrollo en serie de potencias de funciones analíticas concluimos que

$$B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1} \ \forall n \geq 1$$

v) Tenemos que $f_{1-t}(0) - f_t(0) = 0$ y

$$f_{1-t}(z) - f_t(-z) = \frac{ze^{-tz}}{e^z - 1} e^z - \frac{-ze^{-tz}}{e^{-z} - 1} = e^{-tz} \left(\frac{ze^z}{e^z - 1} + \frac{ze^z}{1 - e^z} \right) = 0$$

de donde concluimos que

$$f_{1-t}(z) = f_t(-z), \forall z \in B(0, 2\pi)$$

Como además

$$f_{1-t}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-t)}{n!} z^n, \forall z \in B(0, 2\pi)$$

y

$$f_t(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n(t)}{n!} z^n, \forall z \in B(0, 2\pi)$$

de nuevo por la unicidad del desarrollo en serie de potencias,

$$B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t), \forall n \geq 0$$

■

Para finalizar la sección, nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Existe una fórmula cerrada para la suma de potencias de los primeros n números naturales para cualquier potencia p dada?

A primera vista puede parecer que esta pregunta no tiene nada que ver con lo hasta ahora tratado, sin embargo, en esta cuestión era en la que trabajaba Jacob Bernouilli cuando definió los números y polinomios que llevan su nombre y con los que, sorprendentemente, podemos dar una respuesta relativamente sencilla mediante el siguiente teorema, el cual es el resultado prometido al inicio de la sección.

Teorema 4.2. *Sean n y p números naturales cualesquiera, entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}}{p+1}$$

Demostración:
Lo demostraremos por inducción sobre n.
Así, si $n = 1$ tenemos que fijado $p \geq 1$ como $B_{p+1} = B_{p+1}(0)$,

$$B_{p+1}(1+1) - B_{p+1} \underset{\substack{\text{Prop.}\\ 4.1 \text{ IV})}}{=} (p+1) + B_{p+1}(1) - B_{p+1}(0) \underset{\substack{\text{Prop.}\\ 4.1 \text{ IV})}}{=} p+1$$

y efectivamente

$$\frac{B_{p+1}(2) - B_{p+1}}{p+1} = 1$$

Ahora, si suponemos que para cualquier número natural p, el teorema es cierto para n, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}}{p+1}$$

entonces fijado $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$B_{p+1}((n+1)+1) - B_{p+1} \underset{\substack{\text{Prop.}\\ 4.1 \text{ IV})}}{=} (p+1)(n+1)^p + B_{p+1}(n+1) - B_{p+1} =$$

$$\underset{\text{(HI)}}{=} (p+1)(n+1)^p + (p+1)\sum_{k=1}^{n} k^p = (p+1)\sum_{k=1}^{n+1} k^p$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^p = \frac{B_{p+1}((n+1)+1) - B_{p+1}}{p+1}$$

y concluimos pues la inducción, demostrando con ello el teorema. ∎

Como última observación, veamos que a partir del teorema anterior se consiguen fácilmente las conocidas fórmulas

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

pues

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$
$$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$$
$$B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}$$

y aplicando el teorema

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{B_2(n+1) - B_2}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{B_3(n+1) - B_3}{3} = \frac{(n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{B_4(n+1) - B_4}{4} = \frac{(n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5. Expansión en fracciones simples de la función $\pi\cot(\pi z)$

Euler demostró en [16, §178] la bonita expresión

$$\frac{\pi}{n}\cot\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{kn+m} - \frac{1}{kn-m}\right)$$

que hoy en día se enuncia como

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k}\right) = \frac{1}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{z^2-k^2}$$

y se conoce como expansión en fracciones simples de la función cotangente.

Existen diversas formas de demostrar esta expresión, por ejemplo, una forma bastante simple que emplea nada más que análisis elemental es conocida como “Herglotz trick” y puede consultarse en [1]. Sin embargo, con todas las herramientas que ya hemos desarrollado existe una forma aun más simple de demostrar la veracidad de la expresión como veremos a continuación.

Ya hemos visto que

$$P(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

y que se anula únicamente si $z \in \mathbb{Z}$ (excepto en $z = 0$) y también que podemos aplicar el teorema 2.6 a dicho producto, luego por la derivación logarítmica, si es $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z}{k^2(1 - \frac{z^2}{k^2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}$$

Por otro lado,

$$P'(z) = \left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right)' = \frac{\pi^2 z \cos(\pi z) - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2}$$

y así

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \frac{\pi^2 z \cos(\pi z) - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}$$

concluyendo pues que

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - k^2}$$

6. Generalización del problema. Los valores de $\zeta(2k)$

Finalmente, estudiaremos la prueba que dio Euler en 1755 donde generalizó el problema de la suma de los recíprocos de los cuadrados, a la suma de los recíprocos de cualquier potencia par.

En primer lugar, por motivos que quedarán de manifiesto en seguida, trabajaremos en la bola $B^*(0, \pi)$ con lo que para cualquier z en dicha bola, se cumplirá que

$$0 < \left|\frac{z}{\pi k}\right| < 1, \forall k \geq 1 \tag{7}$$

Ahora, dado que si $z \in B^*(0, \pi)$ es claro que $z/\pi \notin \mathbb{Z}$, por la sección anterior

$$\pi \cot(z) = \pi \cot\left(\pi \frac{z}{\pi}\right) = \frac{\pi}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{\pi\left(\frac{z^2}{\pi^2} - k^2\right)} = \frac{\pi}{z} - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{\pi^2 k^2 - z^2}$$

y así[10]

$$z\cot(z) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{\pi^2 k^2 - z^2} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{\pi^2 k^2}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{\pi k}\right)^2}\right), \forall z \in B(0,\pi) \tag{8}$$

Además, por (7) tenemos que para cada $k \geq 1$ podemos expresar como serie geométrica

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z}{\pi k}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\pi k}\right)^{2n}$$

y por (8),

$$z\cot(z) = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^2}{\pi^2k^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\pi k}\right)^{2n}\right) = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\pi k}\right)^{2n+2} = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\pi k}\right)^{2n}$$

Luego, en virtud del corolario 9.7, tenemos[11] que podemos intercambiar el orden en el sumatorio y así,

$$z\cot(z) = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\pi k}\right)^{2n} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right)z^{2n} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}z^{2n} \tag{9}$$

Ahora, como $z\cot(z)$ es analítica en $B^*(0,\pi)$ y continua en $B(0,\pi)$ (por el pie de página), tenemos que es análitica en la bola $B(0,\pi)$ y así

$$z\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \forall z \in B(0,\pi)$$

para ciertos a_n únicos.
Se comprueba fácilmente que $z\cot(z)$ es par y así, tendremos que $a_{2n+1} = 0$ para cada $n \geq 0$ luego por (9) y la unicidad del desarrollo en serie de potencias de una función analítica concluimos que

$$a_{2n} = -\frac{2}{\pi^{2n}}\zeta(2n) \tag{10}$$

[10] La fórmula es cierta también para $z = 0$ pues

$$\lim_{z\to 0} z\cot(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(z)}\cos(z) = 1$$

[11] Observemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{\pi k}\right|^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\pi k}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\left(1-|z|\cot\left(|z|\right)\right)$$

pues claramente $|z| \in B(0,\pi)$ y efectivamente podemos aplicar el corolario.

Por otro lado, podemos hallar el desarrollo en serie de potencias de la cotangente de otro modo pues, observemos que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ entonces

$$z\cot(z) = z\frac{\cos(z)}{\sin(z)} = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = iz\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$$

luego si tomamos $z \in B(0,\pi)$, $\frac{z}{2i} \in B(0,\pi/2)$ y evaluando en la expresión anterior, como $\frac{z}{2i} = -i\frac{z}{2}$ tenemos que

$$-i\frac{z}{2}\cot\left(-i\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z-1}$$

y sabemos por lo visto en la sección sobre números de Bernoulli que $\frac{z}{e^z-1}$ es analítica en $B(0,\pi)$ con

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

donde en la segunda igualdad hemos empleado la proposición 4.1 II).
Con todo,

$$-i\frac{z}{2}\cot\left(-i\frac{z}{2}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

y tomando $w \in B(0,\pi/2)$ y evaluando en $z = 2wi$ se da que

$$w\cot(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2wi)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}w^{2n}$$

De nuevo, por la unicidad del desarrollo en serie de potencias, tenemos que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \tag{11}$$

y por (10) y (11) concluimos que

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}$$

7. El teorema de Apéry

Con el resultado de la sección anterior, Euler dio por zanjado el problema para los enteros positivos pares y entre otras muchas cosas que se pueden decir sobre estos valores, por la trascendencia de π podemos asegurar que todos estos valores son irracionales. Así, la siguiente pregunta es, ¿son irracionales también los valores de $\zeta(2k+1)$?.

Esta pregunta tan sencilla de formular estuvo con seguridad en la mente de Euler durante toda su vida y en la de prácticamente todos los matemáticos durante los siglos posteriores, aunque por desgracia, sin avance alguno. De hecho, parecía un problema inabordable hasta que en 1978 en las *Journées Arithmétiques* de Marseille, Roger Apéry, en una controvertida conferencia postuló su demostración sobre la irracionalidad de $\zeta(3)$. Dicha demostración resultó, ante sorpresa de todos, ser correcta y $\zeta(3)$ pasó a denominarse la constante de Apéry en su honor.

Durante el presente capítulo desgranaremos la demostración de Apéry la cual, como veremos, resulta ser relativamente elemental en términos de las herramientas empleadas, pero sin embargo, extremadamente compleja en sus detalles.

7.1. Una sucesión de convergencia rápida

La demostración de Apéry gira en torno a dos importantes pilares, el primero de los cuales es la siguiente sucesión doble definida para $k \leq n$

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \tag{12}$$

La importancia de esta sucesión reside en que, por una parte, converge uniformemente en k a $\zeta(3)$, y lo hace bastante rápido; y por otra, que podemos multiplicarla por cierto factor de modo que obtenemos un número entero, lo que nos permite expresarla como una fracción sobre la que controlamos el denominador.

Para comprobar la veracidad de la primera de las afirmaciones veamos en primer lugar que para cada $N \in \mathbb{N}$ se cumple que si es $1 \leq n \leq N$ entonces

$$2n^3\binom{N}{n}\binom{N+n}{n} \geq N^2$$

Efectivamente, tenemos que el resultado es claro si $N=1$ y, si por inducción lo suponemos cierto para N, tenemos entonces que dado $1 \leq n \leq N$ se cumple que

$$2n^3\binom{(N+1)+n}{n}\binom{N+1}{n} = 2n^3\binom{N+n}{n}\binom{N}{n}\frac{N+n+1}{N-n+1} \underset{\text{(HI)}}{\geq} N^2\frac{N+n+1}{N-n+1} \geq N^2$$

y si es $n = N+1$ entonces

$$2(N+1)^3\binom{N+1}{N+1}\binom{2N+2}{N+1} = 2(N+1)^3\binom{2N+2}{N+1} \geq (N+1)^2$$

y la afirmación queda demostrada por inducción.

Con esto, podemos entonces acotar la sucesión como sigue

$$|c_{n,k}-\zeta(3)| \leq \left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right| + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \leq \left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right| + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \leq$$
$$\leq \left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right| + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right| + \frac{1}{n}$$

y vemos que por tanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y así, para cada $n \geq n_0$ se da que

$$|c_{n,k}-\zeta(3)| < \varepsilon, \forall k \leq n$$

y efectivamente tenemos el resultado de convergencia deseado.

Respecto a la segunda afirmación, se resume en el siguiente lema.

Lema 7.1. *Si representamos por $[1,\cdots,n]$ el mínimo común múltiplo de $1,2,\cdots,n$, entonces para cada $k \leq n$ se tiene que*

$$2[1,\cdots,n]^3 c_{n,k}\binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}$$

Demostración:
Denotemos por $M_n = [1,\cdots,n]$, entonces

$$2M_n^3\binom{n+k}{k}c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n}\frac{2M_n^3\binom{n+k}{k}}{m^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}M_n^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

Luego, como $m|M_n$ para cada $m = 1,\cdots,n$, el primer sumatorio en la expresión anterior es un entero y resta únicamente ver que también lo es el segundo.

Para ello, observemos en primer lugar que

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+m}{m}} = \frac{(n+k)!n!m!}{n!k!(n+m)!} = \frac{(n+k)!}{(k-m)!(n+m)!}\frac{m!(k-m)!}{k!} = \frac{\binom{n+k}{k-m}}{\binom{k}{m}}$$

luego

$$\frac{M_n^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} = \frac{M_n^3\binom{n+k}{k-m}}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}$$

y por la proposición 9.13, bastará ver que para cualquier primo p

$$v_p\left(m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}\right) \leq v_p\left(M_n^3\binom{n+k}{k-m}\right)$$

Para ello, observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} v_p\left(m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}\right) &\underset{\text{Prop. 9.12}}{=} 3v_p(m) + v_p\left(\binom{n}{m}\right) + v_p\left(\binom{k}{m}\right) \leq \\ &\underset{\text{Prop. 9.15}}{\leq} 3v_p(m) + \left\lfloor\frac{\log(n)}{\log(p)}\right\rfloor - v_p(m) + \left\lfloor\frac{\log(k)}{\log(m)}\right\rfloor - v_p(m) = v_p(m) + \left\lfloor\frac{\log(n)}{\log(p)}\right\rfloor + \\ &+ \left\lfloor\frac{\log(k)}{\log(p)}\right\rfloor \underset{\text{Prop. 9.16}}{=} v_p(m) + v_p(M_n) + v_p\left([1,2,\cdots,k]\right) \end{aligned}$$

Entonces, como $m|M_n$ para cada $m = 1,\cdots,n$ y $[1,2,\cdots,k]|M_n$, por la proposición 9.13 concluimos que efectivamente

$$\begin{aligned} v_p\left(m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}\right) &\leq v_p(m) + v_p(M_n) + v_p\left([1,2,\cdots,k]\right) \leq 3v_p(M_n) \leq \\ &\leq v_p\left(M_n^3\right) + v_p\left(\binom{n+k}{k-m}\right) = v_p\left(M_n^3\binom{n+k}{k-m}\right) \end{aligned}$$ ■

A pesar de la rápida convergencia de $c_{n,n}$ a $\zeta(3)$, resulta que sigue siendo insuficiente para aplicarle los resultados sobre irracionalidad que se discuten en el anexo, por lo que Apéry procede a realizar una serie de transformaciones a la sucesión de modo que siguen manteniendo estas dos importantes propiedades que hemos visto pero se obtiene como resultado una sucesión cuya velocidad de convergencia aumenta drásticamente y sobre la cual si podremos aplicar los resultados sobre irracionalidad.

7.2. Acelerar la convergencia

Como hemos mencionado al comienzo de la sección la demostración de Apéry causó gran revuelo en la comunidad matemática y sobre todo, gran incredulidad. Sin embargo, tres grandes expertos en teoría de números como fueron Henri Cohen, Alfred van der Poorten y Hendrik Lenstra consiguieron juntos completar los detalles que Apéry no matizó en su conferencia, como se puede leer en [10] o [29] y avalar que efectivamente, la demostración era correcta. A pesar de la veracidad de la demostración, el proceso que describiremos a continuación con el que Apéry consiguió acelearar la convergencia supuso para estos tres grandes matemáticos todo un misterio y, a día de hoy sigue, siendo una incógnita como Apéry pudo obtener estás sucesiones. Cabe destacar que, el carácter burlón e individualista de Apéry no ayudó a resolver este misterio pues, como se puede leer en [19], cuando se le preguntó sobre como se le habían ocurrido estas ideas, él respondió "*Crecieron en mi jardín*".

Comenzemos pues el proceso definiendo

$$d_{n,k}^{(0)} = \binom{n+k}{k} c_{n,k}$$
$$e_{n,k}^{(0)} = \binom{n+k}{k}$$

con lo que el cociente de las dos sucesiones claramente converge uniformemente en k a $\zeta(3)$ y además, si es $M = 2[1, 2, \cdots, n]^3$, entonces $Md_{n,k}^{(0)} \in \mathbb{Z}$.

A partir de estas nuevas sucesiones, se realiza la transformación

$$d_{n,k}^{(1)} = d_{n,n-k}^{(0)}$$
$$e_{n,k}^{(1)} = e_{n,n-k}^{(0)}$$

con lo que

$$\frac{d_{n,k}^{(1)}}{e_{n,k}^{(1)}} = c_{n,n-k}$$

y, puesto que la convergencia era uniforme en k para $c_{n,k}$, tenemos que este cociente también converge uniformemente en k a $\zeta(3)$. Además, $Md_{n,k}^{(1)} = Md_{n,n-k}^{(0)} \in \mathbb{Z}$.

La siguiente transformación es

$$d_{n,k}^{(2)} = \binom{n}{k} d_{n,k}^{(1)}$$

$$e_{n,k}^{(2)} = \binom{n}{k} e_{n,k}^{(1)}$$

y es claro que, a partir de lo visto para la anterior transformación, se mantienen las propiedades deseadas sobre convergencía y que $Md_{n,k}^{(2)} \in \mathbb{Z}$.

La tercera de estas transformaciones es

$$d_{n,k}^{(3)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} d_{n,l}^{(2)}$$

$$e_{n,k}^{(3)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} e_{n,l}^{(2)}$$

y, tenemos que $Md_{n,k}^{(3)} = M\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} d_{n,l}^{(2)} \in \mathbb{Z}$, aunque en este caso, la convergencia es más complicada de ver.
Sabemos que $d_{n,k}^{(2)}/e_{n,k}^{(2)}$ converge uniformemente en k a $\zeta(3)$, y a partir de ésta definimos

$$\delta_{n,k} = \frac{\frac{d_{n,k}^{(2)}}{e_{n,k}^{(2)}} - \zeta(3)}{\zeta(3)}$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{\zeta(3)} \max_{0\le k\le n} \left| \frac{d_{n,k}^{(2)}}{e_{n,k}^{(2)}} - \zeta(3) \right|$$

que cumplirán

$$\frac{d_{n,k}^{(2)}}{e_{n,k}^{(2)}} = \zeta(3)(1+\delta_{n,k})$$

$$|\delta_{n,k}| \le \epsilon_n, \forall k \le n$$

Además, $\epsilon_n \longrightarrow 0$ pues dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$,

$$\left| \frac{d_{n,k}^{(2)}}{e_{n,k}^{(2)}} - \zeta(3) \right| \le \zeta(3)\varepsilon, \forall k \le n$$

y así, si $n \ge n_0$

$$\epsilon_n = \frac{1}{\zeta(3)} \max_{0\le k\le n} \left| \frac{d_{n,k}^{(2)}}{e_{n,k}^{(2)}} - \zeta(3) \right| \le \varepsilon$$

Con todo, observemos que

$$\frac{d^{(3)}_{n,k}}{e^{(3)}_{n,k}} = \frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} d^{(2)}_{n,l}}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}} = \frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\zeta(3)(1+\delta_{n,l})e^{(2)}_{n,l}}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}} = \zeta(3)\frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l} + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\delta_{n,l}e^{(2)}_{n,l}}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}} =$$

$$= \zeta(3)\left(1 + \frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\delta_{n,l}e^{(2)}_{n,l}}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}}\right)$$

y así, como $e^{(2)}_{n,k} \geq 0$,

$$\left|\frac{d^{(3)}_{n,k}}{e^{(3)}_{n,k}} - \zeta(3)\right| = \zeta(3)\frac{\left|\sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\delta_{n,l}e^{(2)}_{n,l}\right|}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}} \leq \zeta(3)\frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l}|\delta_{n,l}|e^{(2)}_{n,l}}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}} \leq \zeta(3)\frac{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\epsilon_n e^{(2)}_{n,l}}{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} e^{(2)}_{n,l}} = \zeta(3)\epsilon_n$$

y por la convergencia a cero de ϵ_n, concluimos que efectivamente se da la convergencia uniforme en k del cociente buscado.

La cuarta transformación es análoga a la segunda,

$$d^{(4)}_{n,k} = \binom{n}{k} d^{(3)}_{n,k}$$

$$e^{(4)}_{n,k} = \binom{n}{k} e^{(3)}_{n,k}$$

luego, el cociente preserva la convergencia y $Md^{(4)}_{n,k} \in \mathbb{Z}$ y la quinta, y última, transformación es análoga a la tercera

$$d^{(5)}_{n,k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} d^{(4)}_{n,l}$$

$$e^{(5)}_{n,k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} e^{(4)}_{n,l}$$

y por tanto, también se preservan estas dos propiedades buscadas.

7.3. $\zeta(3)$ es irracional

Nuestro objetivo ahora es utilizar de algún modo las sucesiones de convergencia rápida obtenidas anteriormente para obtener un par de sucesiones de números enteros a las que poder aplicar el corolario 9.11 y concluir de ello la irracionalidad de $\zeta(3)$.

Para ello, definimos en primer lugar las sucesiones

$$a_n = d_{n,n}^{(5)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n}c_{n,n-l} \tag{13}$$

$$b_n = e_{n,n}^{(5)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n} \tag{14}$$

las cuales, por lo visto en la sección anterior, cumplen que a_n/b_n converge a $\zeta(3)$ y que $2[1,\cdots,n]^3 a_n \in \mathbb{Z}$ pero, lo que resulta de suma importancia y será el segundo pilar fundamental en la demostración es el hecho de que tanto a_n como b_n satisfacen la relación de recurrencia

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0, \forall n \geq 2 \tag{15}$$

siendo $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 5$.

Que ambas sucesiones satisfagan esta relación fue lo que supuso la incredulidad de la comunidad matemática respecto a la demostración, y realmente supone la parte más trabajosa de toda ella por lo que nos ocuparemos de dicha relación más adelante y las aceptaremos como ciertas de momento.

Así, si denotamos por $P(n) = 34n^3 - 51n^2 + 27n - 5$ tenemos que a partir de (15) se cumple para cada $n \geq 2$ que

$$b_{n-1}(n^3 a_n - P(n)a_{n-1} + (n-1)^3 a_{n-2}) - a_{n-1}(n^3 b_n - P(n)b_{n-1} + (n-1)^3 b_{n-2}) = 0$$

y así,

$$n^3(a_n b_{n-1} - a_{n-1}b_n) = (n-1)^3(a_{n-1}b_{n-2} - a_{n-2}b_{n-1}), \forall n \geq 2 \tag{16}$$

A partir de (16) observamos que

$$a_1 b_0 - a_0 b_1 = \frac{6}{1^3}$$

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = \frac{(2-1)^3}{2^3}(a_1 b_0 - a_0 b_1) = \frac{6}{2^3}$$

$$a_3 b_2 - a_2 b_3 = \frac{(3-1)^3}{3^3}(a_2 b_1 - a_1 b_2) = \frac{2^3}{3^3}\frac{6}{2^3} = \frac{6}{3^3}$$

luego es muy fácil ver por inducción[12] que

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = \frac{6}{n^3} \tag{17}$$

Con esto, tenemos ahora la relación

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{b_n b_{n-1}} \underset{(17)}{=} \frac{6}{n^3 b_n b_{n-1}}$$

con lo que para $n \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} = \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_n}{b_n}$$

y tomando límites cuando $N \longrightarrow +\infty$ se cumple que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}} = \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} \tag{18}$$

Un primer paso para poder utilizar el corolario 9.11, es ver que $\zeta(3) - a_n/b_n \neq 0$, pero al ser $b_n > 0$ para cada $n \geq 0$, tenemos que por la relación anterior, efectivamente es

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}} > \frac{6}{(n+1)^3 b_{n+1} b_n} > 0, \forall n \geq 0$$

Además, empleando (15) y la expresión para (14) dada en el lema 9.18, tal como se enuncia en [10], se puede demostrar que existe una constante positiva A tal que

$$b_n \sim A\alpha^n n^{-3/2}$$

siendo $\alpha = \left(1 + \sqrt(2)\right)^4$ la mayor raíz del polinomio $x^2 - 34x + 1$, el cual es el polinomio característico de la parte principal de la recurrencia tras dividirla por n^3.

[12] Si suponemos la propiedad cierta para n, entonces se cumple que por (16)

$$a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1} = \frac{n^3}{(n+1)^3}(a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \underset{\text{(HI)}}{=} \frac{n^3}{(n+1)^3} \frac{6}{n^3} = \frac{6}{(n+1)^3}$$

Así, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{1}{2}A^{-1}\alpha^{-n}n^{3/2} \leq \frac{1}{b_n} \leq \frac{3}{2}A^{-1}\alpha^{-n}n^{3/2} \tag{19}$$

y, teniendo en cuenta (18), para $n \geq n_0$,

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3} \left(\frac{3}{2}A^{-1}\right)^2 \alpha^{-k}\alpha^{-k-1}(k(k-1))^{3/2} \leq$$
$$\underset{k-1\leq k}{\leq} \frac{27}{2}A^{-2}\alpha^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2k}} = \frac{27A^{-2}\alpha^{-1}}{2(\alpha^2-1)} \frac{1}{\alpha^{2n}}$$

de donde obtenemos que

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = O(\alpha^{-2n}) \tag{20}$$

Ahora, a_n no tiene porque ser un número entero pero, si sabemos que $p_n = 2[1, \cdots, n]^3 a_n$ y $q_n = 2[1, \cdots, n]^3 b_n$ lo son y como $p_n/q_n = a_n/b_n$ pasamos a trabajar con la sucesión p_n/q_n pues necesitamos números enteros para poder aplicar el corolario deseado.

Con todo, si logramos ver que para cierta constante $r > 1$ y dado cualquier $0 < \varepsilon < 1$ se tiene que

$$\alpha^{-2n} = O\left(([1, \cdots, n]^3 b_n)^{-r+\varepsilon}\right) \tag{21}$$

entonces teniendo en cuenta (20) existirán ciertas constantes $C, K > 0$ tales que para n suficiente grande

$$\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} = \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} \leq C\alpha^{-2n} \leq \frac{CK}{2^{-r+\varepsilon}} q_n^{-r+\varepsilon}$$

luego

$$\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} = O(q_n^{-r+\varepsilon})$$

y al ser $r > 1$ bastaría tomar ε lo suficiente pequeño y estamos casi en disposición de aplicar el el corolario 9.11.

Sin más, en primer lugar observemos que por (19) se tiene que para n grande

$$\left([1, \cdots, n]^3 \alpha^n n^{-3/2}\right)^{-r+\varepsilon} \leq \left(\frac{1}{2}A^{-1}\right)^{-r+\varepsilon} \left([1, \cdots, n]^3 b_n\right)^{-r+\varepsilon}$$

y basta ver entonces que

$$\alpha^{-2n} = O\left(([1, \cdots, n]^3 \alpha^n n^{-3/2})^{-r+\varepsilon}\right) \tag{22}$$

Ahora, si tomamos $r = \frac{2\log\alpha}{\log\alpha+3} > 1$ observamos que

$$e^{-3nr} = e^{\frac{-6n\log\alpha}{\log\alpha+3}} = \alpha^{\frac{-6n}{\log\alpha+3}} = \alpha^{-\frac{-2n\log\alpha+2n\log\alpha+6n}{\log\alpha+3}} = \alpha^{nr-2n}$$

con lo que $\alpha^{-2n} = e^{-3nr}\alpha^{-nr}$ y si vemos que

$$[1,\cdots,n] = O\left(n^{1/2}e^{n\frac{r}{r-\varepsilon}}\right) \tag{23}$$

entonces existe cierto $K > 0$ tal que para n grande

$$[1,\cdots,n]^3 \leq Kn^{3/2}e^{\frac{3nr}{r-\varepsilon}}$$

y así,

$$([1,\cdots,n]^3n^{-3/2})^{r-\varepsilon} \leq Ce^{3nr}$$

siendo $C = K^{r-\varepsilon}$, y con todo

$$\alpha^{-2n} = e^{-3nr}\alpha^{-nr} \leq C([1,\cdots,n]^3n^{-3/2})^{-r+\varepsilon}\alpha^{-nr} = C\alpha^{-n\varepsilon}([1,\cdots,n]^3n^{-3/2}\alpha^n)^{-r+\varepsilon} \leq$$
$$\leq C([1,\cdots,n]^3n^{-3/2}\alpha^n)^{-r+\varepsilon}$$

y quedaría pues demostrado (22).

Para ver pues la veracidad de (23), observemos ahora que por el teorema de los números primos y [22, Tma. 420][13] se tiene que

$$\frac{\log([1,\cdots,n])}{n} = \frac{\log([1,\cdots,n])}{\log n}\frac{1}{\pi(n)}\frac{\log n}{n}\pi(n) \longrightarrow 1$$

y así, al ser $\frac{r}{r-\varepsilon} > 1$, para n suficiente grande

$$\log([1,\cdots,n]) \leq n\frac{r}{r-\varepsilon}$$

de donde

$$[1,\cdots,n] \leq e^{n\frac{r}{r-\varepsilon}} \leq n^{1/2}e^{n\frac{r}{r-\varepsilon}}$$

Con todo lo visto, resta únicamente ver que $q_n \longrightarrow +\infty$ pues así, por el corolario 9.11, tendremos efectivamente que $\zeta(3)$ es irracional.

Observemos que si b_n es estrictamente creciente, entonces q_n será también estrictamente creciente[14] y al ser una sucesión de números naturales concluimos que efectivamente tiene límite infinito.

[13] $\pi(n) \sim \frac{\log([1,\cdots,n])}{\log n}$

[14] $q_{n+1} = 2[1,\cdots,n,n+1]^3b_{n+1} > 2[1,\cdots,n]^3b_n = q_n$

Veámoslo pues por inducción, es decir, vamos a demostrar que $b_n > b_{n-1}$ para cada $n \geq 1$, pero antes observemos que la función $f(x) = P(x) - x^3 - (x-1)^3$ es positiva para todo $x \geq 1$.

Efectivamente, como $f'(x) = 96x^2 - 96x + 24$ tenemos que al ser una parábola,

$$f'(x) \geq f'\left(\frac{96}{2 \cdot 96}\right) = 0$$

luego f es creciente, y como $f(1) = 4$, es cierto lo planteado.

Volviendo a la inducción, es claro que al ser $b_0 = 1$ y $b_1 = 5$, $b_1 > b_0$, luego el resultado es cierto si $n = 1$ y, si lo suponemos cierto para $n-1$, entonces

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &\underset{(15)}{=} \frac{P(n)b_{n-1} - (n-1)^3 b_{n-2}}{n^3} - b_{n-1} = \frac{\left(P(n) - n^3\right) b_{n-1} - (n-1)^3 b_{n-2}}{n^3} > \\ &\underset{(\text{HI})}{>} \frac{\left(P(n) - n^3\right) b_{n-1} - (n-1)^3 b_{n-1}}{n^3} = \frac{f(n) b_{n-1}}{n^3} > 0 \end{aligned}$$

y concluimos pues la inducción.

7.4. Últimos detalles de la demostración

Como hemos visto en la sección anterior si a_n y b_n efectivamente cumplen la relación (15), entonces quedará demostrado que $\zeta(3)$ es irracional.

Puesto que la demostración de esta propiedad sobre las sucesiones que queremos ver es bastante larga, daremos aquí la idea general y relegaremos los detalles a la última sección del anexo.

Durante esta sección tomaremos la convención habitual sobre los coeficientes binomiales, de modo que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ o $k < 0$.

Observemos pues, en primer lugar que si definimos para cada $n \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$

$$b_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

en virtud del lema 9.18 tendremos que para $n \geq 0$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} c_{n,k}$$

y así, teniendo en cuenta que $b_{n,n+1} = b_{n-1,n+1} = b_{n-1,n} = 0$, se tiene que para cada $n \geq 1$

$$(n+1)^3 a_{n+1} - P(n+1) a_n + n^3 a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1)^3 b_{n+1,k} c_{n+1,k} - P(n+1) b_{n,k} c_{n,k} + n^3 b_{n-1,k} c_{n-1,k}$$

$$(n+1)^3 b_{n+1} - P(n+1) b_n + n^3 b_{n-1} = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1)^3 b_{n+1,k} - P(n+1) b_{n,k} + n^3 b_{n-1,k}$$

con lo cual si definimos para $n \geq 1$,

$$S_{n,k} = (n+1)^3 b_{n+1,k} c_{n+1,k} - P(n+1) b_{n,k} c_{n,k} + n^3 b_{n-1,k} c_{n-1,k} \tag{24}$$

$$s_{n,k} = (n+1)^3 b_{n+1,k} - P(n+1) b_{n,k} + n^3 b_{n-1,k} \tag{25}$$

bastará ver que $\sum_{k=0}^{n+1} S_{n,k} = 0$ y $\sum_{k=0}^{n+1} s_{n,k} = 0$.

Comenzamos pues definiendo para $n \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$

$$B_{n,k} = 4(2n+1)\left(k(2k+1) - (2n+1)^2\right) b_{n,k} \tag{26}$$

y, por el lema 9.19 tendremos que

$$\sum_{k=0}^{n+1} s_{n,k} = \sum_{k=0}^{n+1} B_{n,k} - B_{n,k-1} = B_{n,n+1} - B_{n,-1}$$

y al ser $b_{n,n+1} = b_{n,-1} = 0$, también son nulos $B_{n,n+1}$ y $B_{n,-1}$ y concluimos pues con lo deseado.

Así, hemos probado que la recursión es cierta para b_n y resta verlo para a_n, para la cual, de manera muy parecida definimos para $n \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$

$$A_{n,k} = B_{n,k} c_{n,k} + \frac{(-1)^{k-1} 5k}{n(n+1)} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (2n+1) \tag{27}$$

y, por el lema 9.21 tendremos que

$$\sum_{k=0}^{n+1} S_{n,k} = \sum_{k=0}^{n+1} A_{n,k} - A_{n,k-1} = A_{n,n+1} - A_{n,-1}$$

y nuevamente como $A_{n,n+1}$ y $A_{n,-1}$ son nulos, habremos concluido con la demostración.

8. Demostraciones alternativas y algunos resultados sobre $\zeta(2k+1)$ para enteros $k > 1$

El problema de Basilea ha sido desde su aparición en 1650 altamente estudiado por la comunidad matemática, y su importancia fue tal que en los siglos posteriores, el auge de nuevas ramas de las matemáticas siempre traía consigo una nueva demostración alternativa para este problema.

Existen una gran cantidad de ejemplos, pero entre los más destacados podríamos citar la demostración de Cauchy dada en [8, Nota VIII], la cual no emplea más que resultados básicos sobre funciones trigonométricas; demostraciones muy variadas empleando análisis de Fourier como se pueden encontrar en [37, Ejer. 5.5.2] o [20, Ejem. 1, VII]; numerosas demostraciones haciendo uso de cálculo integral, como por ejemplo la de Apostol [4] o demostraciones muy elementales que hacen únicamente uso de los conceptos más básicos del análisis matemático como [26], [12] o [9]. Entre las más curiosas se encuentran [27], donde se emplea la teoría de la probabilidad para solucionar el problema; la planteada como ejercicio 1 en [24, Cap. 8.7], donde se utiliza la fórmula del número de representantes de un entero como suma de cuatro cuadrados o [34], donde se plantea una solución desde el punto de vista de la física.

El teorema de Apéry ha sido también altamente estudiado[15], de hecho tan solo un año después de la conferencia de Apéry, el matemático holandés Frits Beukers, basándose en sus ideas pero haciendo uso de integrales doble y triples, obtuvo una demostración más sencilla y elegante [6]. Otras demostraciones basadas en las ideas originales de Apéry pueden encontrarse en la demostración "elemental" dada por Zudilin en [40] o la dada por Prévost empleando aproximantes de Padé en [28].

Puesto que el teorema de Apéry es sustancialmente más complejo que el problema de Basilea y su generalización para los enteros pares, aunque con los años se ha continuado estudiando y buscando demostraciones alternativas, a fecha de hoy, ninguna de ellas se ha podido generalizar para obtener resultados sobre el resto de valores impares de la función zeta de Riemann.

[15]Destacamos el artículo de Huylebrouck [23] donde se da un esquema de demostración que permite demostrar la irracionalidad de $\pi, \log 2, \zeta(2)$ y $\zeta(3)$ empleando la misma técnica.

Sin embargo, ciertos resultados parciales aparecieron a comienzos de siglo debidos a Rioval que podemos enunciar como sigue:

Teorema 8.1. (Rioval, [30]) *Existen infinitos valores irracionales de la función zeta de Riemann entre los enteros positivos impares.*

Teorema 8.2. (Rioval, [31]) *Existe un entero impar j tal que $5 \leq j \leq 21$ y $\zeta(j) \notin \mathbb{Q}$.*

De hecho, el último resultado fue mejorado por Zudilin quien acotó el resultado:

Teorema 8.3. (Zudilin, [41]) *Al menos uno de los cuatro números $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ es irracional.*

9. Anexos

9.1. Productos de series de potencias

Lema 9.1. *Sean f, g funciones analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ entonces se cumplen:*

I) $(f(z)g(z))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z), \forall n \geq 1$

II) *Si $f(z) \neq 0$ en A, denotando $h(z) = 1/f(z)$ tenemos que*

$$h^{(n)}(z) = -h(z) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} h^{(k)}(z) f^{(n-k)}(z), \forall n \geq 1$$

Demostración:

I) Sabemos que si $n = 1$ entonces

$$(f(z)g(z))' = f(z)g'(z) + f'(z)g(z) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(z)g^{(1-k)}(z)$$

luego la fórmula es cierta para el caso base y, si la suponemos cierta para n, entonces

$$(f(z)g(z))^{(n+1)} = \left[(f(z)g(z))^{(n)}\right]' \underset{\text{(HI)}}{=} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z)\right]' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k)}(z)g^{(n+1-k)}(z) + f^{(k+1)}(z)g^{(n-k)}(z)\right] = f(z)g^{(n+1)}(z) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n+1-k)}(z) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(z)g^{(n+1-k)}(z) + f^{(n+1)}(z)g(z) =$$
$$= f(z)g^{(n+1)}(z) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(k)}(z)g^{(n+1-k)}(z) + f^{(n+1)}(z)g(z) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(z)g^{(n+1-k)}(z)$$

y el resultado queda probado por inducción.

II) Ahora como $h(z)f(z) = 1$ para cada $z \in A$, aplicando el apartado anterior tenemos que

$$0 = (h(z)f(z))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(z) f^{(n-k)}(z)$$

de donde

$$h^{(n)}(z)f(z) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} h^{(k)}(z) f^{(n-k)}(z)$$

y teniendo en cuenta que $h(z) = 1/f(z)$ se obtiene la expresión deseada. ■

Lema 9.2. *Sea $g : B(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función dada por*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

entonces si $g(z) \neq 0$ para cada $z \in B(z_0, r)$ se tiene que $h(z) = 1/g(z)$ es de la forma

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

siendo $d_0 = 1/b_0$ y

$$d_n = -\frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k} = -\frac{1}{b_0} \sum_{k=1}^{n} d_{n-k} b_k$$

Demostración:
En primer lugar, como g viene dada por una serie de potencias, tenemos que es analítica y, por hipótesis, no nula en la bola $B(z_0, r)$, con lo que h también es analítica y por tanto,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \forall z \in B(z_0, r)$$

Así basta definir

$$d_n = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}$$

y ver que cumplen las relaciones deseadas.
Además, por la unicidad en la representación en serie de potencias de una función analítica, se tiene que

$$g^{(n)}(z_0) = n! b_n, \forall n \geq 0$$

Con todo, en primer lugar tenemos que

$$d_0 = h(z_0) = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{b_0}$$

y si es $n > 1$ empleando el segundo apartado del lema anterior, tenemos que

$$n!d_n = h^{(n)}(z_0) = -h(z_0)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}h^{(k)}(z_0)g^{(n-k)}(z_0) = -h(z_0)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}k!d_k(n-k)!b_{n-k} =$$
$$= -\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{n-1}n!d_kb_{n-k}$$

y efectivamente

$$d_n = -\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{n-1}d_kb_{n-k} = -\frac{1}{b_0}\sum_{k=1}^{n}d_{n-k}b_k \qquad \blacksquare$$

Lema 9.3. (Producto de Cauchy) *Sean f, g funciones en la bola $B(z_0, r)$ definidas por*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

entonces podemos expresar para cada $z \in B(z_0, r)$

$$f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

siendo

$$c_k = \sum_{n=0}^{k}a_nb_{k-n}$$

La demostración puede consultarse en [25, Tma 3.1, Cap. 2]

9.2. Convergencia de p-series

Lema 9.4. *Sea $p > 0$, entonces la sucesión*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$$

converge si, y solo si, $p > 1$.

Demostración:
Observemos que para cualquier $p > 0$ la sucesión $\{\frac{1}{k^p}\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente y de términos positivos, y la función $f_p : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_p(x) = \frac{1}{x^p}$ es también decreciente y cumple que $f_p(k) = \frac{1}{k^p}$ para cada k natural.

Entonces, por el criterio de la integral, la serie buscada y la integral impropia $\int_1^\infty f_p(x)\,dx$ tienen el mismo carácter luego basta calcular los valores de esta última integral para cada $p > 0$.
En primer lugar, tenemos que si $p \neq 1$ entonces

$$\int_1^\infty f_p(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty}(1-p)\left[\frac{1}{t^{p-1}}-1\right] = \begin{cases} p-1 & si \quad p>1 \\ \\ +\infty & si \quad p<1 \end{cases}$$

luego efectivamente la serie converge si $p > 1$ y diverge para $p < 1$.
Por último, para el caso $p = 1$, tenemos que

$$\int_1^\infty f_1(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\ln(t) = +\infty$$

con lo que queda demostrado el lema. ■

9.3. Sumas de conjuntos numerables

Definición 9.1. *Sea X un conjunto numerable y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, decimos que la serie*

$$\sum_{x\in X} f(x)$$

es absolutamente convergente si existe alguna biyección $g : \mathbb{N} \longrightarrow X$ tal que la serie

$$\sum_{k=1}^\infty f(g(k))$$

es absolutamente convergente.
En este caso, definimos su suma como

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{k=1}^\infty f(g(k))$$

Observemos que la definición anterior no depende de la biyección elegida pues si $\sum_{k=1}^\infty f(g(k))$ es absolutamente convergente, entonces lo es cualquier reordenación de ésta, y con la misma suma.
Efectivamente, si es $h : \mathbb{N} \longrightarrow X$ otra biyección, tenemos que $g^{-1} \circ h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ será una permutación de $\mathbb{N}$ y así, por la convergencia absoluta,

$$\sum_{k=1}^\infty f(g(k)) = \sum_{k=1}^\infty f(g((g^{-1}\circ h)(k))) = \sum_{k=1}^\infty f(h(k))$$

Una caracterización muy útil en la práctica de la definición anterior es la siguiente.

Proposición 9.5. *Sea X un conjunto numerable y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, se tiene que la serie $\sum_{x\in X} f(x)$ es absolutamente convergente si, y solo si,*

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A\subset X, A \text{ es finito}\right\} < \infty$$

Demostración:
En primer lugar, si $\sum_{x\in X} f(x)$ es absolutamente convergente, por lo visto sabemos que para cualquier biyección $g : \mathbb{N} \longrightarrow X$ se tiene que

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} |f(g(k))| < \infty$$

siendo el valor de S independiente de la biyección g.
Así, dado $A \subset X$ finito, supongamos que de cardinal m, se tiene que $X \setminus A$ es numerable y por tanto existen ciertas biyecciones $h_1 : \{1, \cdots, m\} \longrightarrow A$ y
$h_2 : \mathbb{N} \setminus \{1, \cdots, m\} \longrightarrow X \setminus A$ a partir de las cuales podemos construir otra biyección
$h : \mathbb{N} \longrightarrow X$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} h_1(k) & si \quad 1 \leq k < m \\ h_2(k) & si \quad\quad k \geq m \end{cases}$$

Con todo, tomando $N > m$ tenemos que

$$\sum_{x\in A}|f(x)| = \sum_{k=1}^{m}|f(h_1(k))| \leq \sum_{k=1}^{m}|f(h_1(k))| + \sum_{k=m+1}^{N}|f(h_2(k))| = \sum_{k=1}^{N}|f(h(k))| \leq S$$

y así, S es cota superior del conjunto planteado, luego existe y es finito el supremo.

Recíprocamente, sea $g : \mathbb{N} \longrightarrow X$ una biyección y denotemos por

$$S = \sup\left\{\sum_{x\in X}|f(x)| : A\subset X, A \text{ es finito}\right\}$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $S - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto, luego existe cierto $A \subset X$ finito tal que

$$S - \sum_{x\in A}|f(x)| < \varepsilon$$

Ahora, si es $k_0 = \max\left(g^{-1}(A)\right)$, entonces

$$\{|f(x)| : x \in A\} \subset \{|f(g(k))| : 1 \leq k \leq k_0\}$$

y así para todo $K \geq k_0$ se tiene que

$$\sum_{x\in A} |f(x)| \leq \sum_{k=1}^{k_0} |f(g(k))| \leq \sum_{k=1}^{K} |f(g(k))|$$

y por tanto,

$$\left| S - \sum_{k=1}^{K} |f(g(k))| \right| = S - \sum_{k=1}^{K} |f(g(k))| \leq S - \sum_{x\in A} |f(x)| < \varepsilon$$

Así, hemos demostrado que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(g(k))$$

converge absolutamente y, por definición, tenemos pues que $\sum_{x\in X} f(x)$ converge absolutamente. ∎

Pasemos ya pues a demostrar el teorema fundamental de la sección, análogo al teorema de Fubini para integrales dobles y de donde recibe su nombre.

Teorema 9.6. (Fubini para sumas infinitas) *Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que la serie*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$$

es absolutamente convergente, entonces se cumple que

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(n,m) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m)$$

Demostración:
En primer lugar sea $m_0 \in \mathbb{N}$ fijo, entonces existe una biyección $h_1 : 2\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{m_0\})$ y podemos definir $h_2 : 2\mathbb{N}+1 \longrightarrow \mathbb{N} \times \{m_0\}$ tal que $h(2n+1) = (n, m_0)$, y así la aplicación $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$h(n) = \begin{cases} h_1(n) & si \quad n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ h_2(n) & si \quad n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

es una biyección.
Así, tenemos que para cualquier $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{N} |f(n,m_0)| = \sum_{n=1}^{N} |f(h_2(2n+1))| \leq \sum_{n=1}^{2N+1} |f(h(n))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(h(n))| < \infty$$

con lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n, m_0)$ converge absolutamente.
Análogamente, se ve que dado $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} f(n_0, m)$ también converge absolutamente.

Por otro lado, tenemos que dado $l \in \mathbb{N}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos definir los conjuntos

$$A_{lk} = \{1, \cdots, lk\}$$

$$B_{lk} = \{1, \cdots l\} \times \{1, \cdots k\}$$

y como ambos tienen el mismo cardinal, existiran ciertas biyecciones $h_1 : A_{lk} \longrightarrow B_{lk}$ y $h_2 : \mathbb{N} \setminus A_{lk} \longrightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus B_{lk}$ a partir de las cuales podemos formar la biyección $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$h(n) = \begin{cases} h_1(n) & si \quad n \in A_{lk} \\ h_2(n) & si \quad n \notin A_{lk} \end{cases}$$

Como la serie $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n, m)$ converge absolutamente, tenemos que podemos definir

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} |f(h(j))|$$

y así,

$$\sum_{n=1}^{l} \left| \sum_{m=0}^{k} f(n, m) \right| \leq \sum_{n=1}^{l} \sum_{m=1}^{k} |f(n, m)| = \sum_{j=1}^{lk} |f(h(j))| \leq M$$

Como la desigualdad anterior es cierta para cualquier l y k (pues el valor de M es independiente de la biyección h elegida), por la continuidad de la suma y del valor absoluto concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{l} \left| \sum_{m=1}^{k} f(n, m) \right| = \sum_{n=1}^{l} \left| \sum_{m=1}^{\infty} f(n, m) \right| \leq M, \forall l \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n, m) \right)$$

converge absolutamente.
Análogamente, se ve que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n, m) \right)$$

también converge absolutamente y resta pues ver que ambas son iguales al valor de la serie original.

Sea pues $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una biyección cualquiera, entonces como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(g(n))$ converge absolutamente, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f(g(n))| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

Ahora, si denotamos por $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ las correspondientes proyecciones canónicas, tenemos que si tomamos

$$l_0 = \max \{\pi_1(g(n)), \pi_2(g(n)) : 1 \leq n \leq N\}$$

para cualesquiera $l, k \geq l_0$ se cumple que

$$\{g(1), \cdots, g(N)\} \subset \underbrace{\{1, \cdots, l\} \times \{1, \cdots, k\}}_{C_{lk}}$$

Así, tomando $M > N$ tal que $C_{lk} \subset g(\{1, \cdots, M\})$, tenemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{l} \sum_{m=1}^{k} f(n,m) - \sum_{n=1}^{N} f(g(n)) \right| = \left| \sum_{\substack{n=N+1 \\ n \in g^{-1}(C_{lk})}}^{M} f(g(n)) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |f(g(n))| \underset{(28)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \tag{29}$$

Por tanto, fijado $l \geq l_0$ como (29) es cierto para todo $k \geq l_0$, tenemos que por la continuidad de la suma y del valor absoluto

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \sum_{n=1}^{l} \sum_{m=1}^{k} f(n,m) - \sum_{n=1}^{N} f(g(n)) \right| = \left| \sum_{n=1}^{l} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m) \right) - \sum_{n=1}^{N} f(g(n)) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

Por otro parte, por (28) tenemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n)) - \sum_{n=1}^{N} f(g(n)) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(g(n))| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{31}$$

y con todo, si es $l \geq l_0$ entonces por (30) y (31)

$$\left| \sum_{n=1}^{l} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n)) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{l} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m) \right) - \sum_{n=1}^{N} f(g(n)) \right| +$$
$$+ \left| \sum_{n=1}^{N} f(g(n)) - \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n)) \right| < \varepsilon$$

De aquí se concluye pues que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n))$$

Análogamente, se tiene que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n,m)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n))$$

y concluimos pues la demostración. ■

Corolario 9.7. *Sea $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que existe y es finita alguna de las siguientes sumas*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f(n,m)|\right) \qquad o \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(n,m)|\right)$$

entonces existen y son iguales las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m) \qquad y \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(n,m)$$

Demostración:
Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f(n,m)|\right)$$

existe y es finita (el otro caso es análogo), entonces dado $A \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ finito, tomando

$$M = \max\{\pi_1(A), \pi_2(A)\}$$

se tiene que

$$\sum_{x\in A} |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{M}\left(\sum_{m=1}^{M} |f(n,m)|\right) \leq \sum_{n=1}^{M}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f(n,m)|\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f(n,m)|\right)$$

Luego

$$\sup\left\{\sum_{x\in A} |f(x)| : A \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}, A \text{ es finito}\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |f(n,m)|\right) < \infty$$

con lo que por la proposición 9.5 la serie $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ es absolutamente convergente y por el teorema anterior se cumple lo deseado. ■

9.4. Algunos resultados sobre teoría de números

Teorema 9.8. (Dirichlet, 1842) *Dado un número real x y un número natural N, existe alguna fracción p/q, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq q \leq \mathbb{N}$ y*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}$$

La demostración puede consultarse en [38, Tma 4.2, Cap. 4]

Observación 9.1. En el teorema anterior podemos exigir que p/q sea irreducible ya que si es $p/q = p_0/q_0$ con $q_0 < q$ entonces

$$\left| x - \frac{p_0}{q_0} \right| = \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN} < \frac{1}{q_0 N}$$

Lema 9.9. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{N}$ fijo, entonces se cumplen:*

i) *Para cada constante $C_q > 0$ existe, a lo sumo, una cantidad finita de enteros $p \in \mathbb{Z}$ tales que $|x - p/q| < C_q$*

ii) *Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe un C_q suficientemente pequeño tal que*

$$|x - p/q| > C_q, \forall p \in \mathbb{Z}$$

La demostración puede consultarse en [38, Lema 4.4, Cap. 4]

Teorema 9.10. *Sea $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si, y solo si, existe una sucesión de racionales p_n/q_n, con $q_n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = o\left(\frac{1}{q_n} \right)$$

La demostración puede consultarse en [38, Tma 4.7, Cap. 4]

Corolario 9.11. *Dado $x \in \mathbb{R}$, si existe una sucesión de racionales, p_n/q_n con $q_n \in \mathbb{N}$, $q_n \longrightarrow +\infty$, y cierto $\delta > 0$ tal que*

$$0 \neq x - \frac{p_n}{q_n} = O\left(\frac{1}{q_n^{1+\delta}} \right)$$

entonces x es irracional.

<u>Demostración:</u>
Por hipótesis, $|x - p_n/q_n| > 0$ y existirán ciertos $K > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{K}{q_n^{1+\delta}}, \forall n \geq n_0 \tag{32}$$

Además, como $q_n \longrightarrow +\infty$, entonces $K/q_n^\delta \longrightarrow 0$ y por (32) se tiene entonces que

$$q_n \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \longrightarrow 0$$

y por tanto

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = o\left(\frac{1}{q_n}\right)$$

de donde, por el teorema anterior, concluimos que x es irracional. ■

Definición 9.2. *Sea p primo, se define el orden p-ádico como la aplicación* $v_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ *definida como*

$$v_p(n) = \max\{v \in \mathbb{Z}_+ : p^v | \, n\}$$

Proposición 9.12. *Sea p primo y* $m, n \in \mathbb{N}$*, se cumplen*

I) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$

II) *Si* $m|n$ *entonces* $v_p\left(\frac{n}{m}\right) = v_p(n) - v_p(m)$

<u>Demostración:</u>

I) En primer lugar, $v_p(mn) \geq v_p(m) + v_p(n)$ pues tenemos que $p^{v_p(n)}\big| \, n$ y $p^{v_p(m)}\big| \, m$, luego

$$p^{v_p(m)+v_p(n)} = p^{v_p(m)} p^{v_p(n)}\big| \, mn$$

Ahora, para la desigualdad contraria, observemos en primer lugar que como $p^{v_p(m)}\big| \, m$ y $p^{v_p(nm)}\big| \, nm$, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $nm = ap^{v_p(mn)}$ y $m = bp^{v_p(m)}$ de donde

$$nbp^{v_p(m)} = nm = ap^{v_p(mn)}$$

y así

$$nb = ap^{v_p(nm) - v_p(m)}$$

Como además $v_p(m) \leq v_p(nm)$ (pues es claro que como $p^{v_p(m)}\big| \, m$, entonces $p^{v_p(m)}\big| \, nm$) tenemos que

$$p^{v_p(nm) - v_p(m)}\big| \, nb$$

Ahora, como $m = bp^{v_p(m)}$, por la definición de v_p, $\operatorname{mcd}(p,b) = 1$ y así,

$$\operatorname{mcd}\left(p^{v_p(nm)-v_p(m)}, b\right) = 1$$

de donde deducimos que

$$p^{v_p(nm)-v_p(m)} \,\big|\, n$$

y, por tanto, $v_p(nm) - v_p(m) \leq v_p(n)$ y efectivamente $v_p(nm) \leq v_p(m) + v_p(n)$.

II) Como $m|n$ existe un $a \in \mathbb{Z}$ tal que $n = am$, con lo que $\frac{n}{m} = a$ y

$$v_p(n) = v_p(am) \underset{\text{I)}}{=} v_p(a) + v_p(m) = v_p\left(\frac{n}{m}\right) + v_p(m)$$

y efectivamente

$$v_p\left(\frac{n}{m}\right) = v_p(n) - v_p(m) \qquad \blacksquare$$

Proposición 9.13. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que $m|n$ si, y solo si, $v_p(m) \leq v_p(n)$ para cada primo p.*

Demostración:

Si $m|n$, dado p primo tenemos por la proposición anterior que

$$v_p(m) = v_p(n) - v_p\left(\frac{n}{m}\right) \leq v_p(n)$$

Recíprocamente, supongamos que $v_p(m) \leq v_p(n)$ para cada primo p y sea la factorización de m tal que

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Entonces, si vemos que $p_i^{\alpha_i} \,|\, n$ para cada $i = 1, \cdots, k$, entonces $m|n$ tal como deseábamos ver.

Sin más, como $p_i^{\alpha_i} \,|\, m$ se cumple que

$$\alpha_i \leq v_{p_i}(m) \leq v_{p_i}(n)$$

y efectivamente, se da que $p_i^{\alpha_i} \,|\, n$ tal como queríamos ver. $\blacksquare$

Teorema 9.14. (Legendre) *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces dado un primo p*

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

<u>Demostración:</u>
Veamoslo por inducción sobre n.
Así, si $n = 1$ entonces dado p primo, es claro que $v_p(1) = 0$ y $\left\lfloor \frac{1}{p^k} \right\rfloor = 0$ para cada $k \geq 1$ con lo que

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0 = v_p(1) = v_p(1!)$$

Supongamos pues que el teorema es cierto para n y veamos que también lo es para $n+1$ con lo que concluiríamos la demostración.
Sea pues p primo, entonces si $0 \leq k \leq v_p(n+1)$ tenemos que

$$\frac{n+1}{p^k} \in \mathbb{N}$$

luego

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} - \frac{1}{p^k} \right\rfloor = \frac{n+1}{p^k} - 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor - 1$$

y así

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + 1, \forall k \leq v_p(n+1) \tag{33}$$

Por otra parte, si $k > v_p(n+1)$ entonces tendremos que existen[16] $q, r \in \mathbb{Z}$ con $0 < r < p^k$ tales que $n + 1 = p^k q + r$ y así

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{p^k} \right\rfloor = q$$

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} - \frac{1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r-1}{p^k} \right\rfloor \underset{r-1\geq 0}{=} q$$

con lo que

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor, \forall k > v_p(n+1) \tag{34}$$

Además, tomando $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p^{k_0} > n+1$ tenemos que

$$0 < \frac{n}{p^k} < \frac{n+1}{p^k} < 1, \forall k \geq k_0$$

y así

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0, \forall k \geq k_0 \tag{35}$$

[16]Observemos que $r > 0$ pues si fuera $r = 0$ tendríamos que $p^k \big| n+1$ siendo $k > v_p(n+1)$ lo que supone una contradicción.

Con todo, si es $v_p(n+1)=0$ entonces

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor \underset{(35)}{=} \sum_{k=1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor \underset{(34)}{=} \sum_{k=1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \underset{(\mathrm{HI})}{=} v_p(n!) = v_p(n!)+v_p(n+1) = v_p((n+1)!)$$

y, si es $v_p(n+1)>0$ se cumple que

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor &\underset{(35)}{=} \sum_{k=1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor \underset{v_p(n+1)<k_0}{=} \sum_{k=1}^{v_p(n+1)}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor + \sum_{k=v_p(n+1)+1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor = \\ &\underset{(33)}{=} \sum_{k=1}^{v_p(n+1)}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+1\right) + \sum_{k=v_p(n+1)+1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor \underset{(34)}{=} v_p(n+1)+\sum_{k=1}^{k_0}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor = \\ &\underset{(35)}{=} v_p(n+1)+\sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \underset{(\mathrm{HI})}{=} v_p(n+1)+v_p(n!) = v_p((n+1)!)\end{aligned}$$

■

Proposición 9.15. *Sean $n,m\in\mathbb{N}$ con $m\leq n$, entonces dado p cualquier primo,*

$$v_p\left(\binom{n}{m}\right) \leq \left\lfloor\frac{\log(n)}{\log(p)}\right\rfloor - v_p(m)$$

Demostración:

En primer lugar observemos que por la proposición 9.12 y el teorema de Legendre

$$\begin{aligned}v_p\left(\binom{n}{m}\right) &= v_p\left(\frac{n!}{m!(n-m)!}\right) = v_p(n!)-v_p(m!)-v_p((n-m)!) = \\ &= \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-m}{p^k}\right\rfloor \end{aligned} \tag{36}$$

donde

$$\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-m}{p^k}\right\rfloor < \frac{n}{p^k}-\frac{m}{p^k}+1-\frac{n-m}{p^k}+1 = 2$$

y al ser un entero,

$$\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-m}{p^k}\right\rfloor \leq 1, \forall k\geq 1 \tag{37}$$

Por otro lado, si $k > \left\lfloor\frac{\log(n)}{\log(p)}\right\rfloor = \lfloor\log_p n\rfloor$, entonces

$$0 \leq \frac{n}{p^k} < \frac{n}{p^{\log_p n}} = 1$$

y como $\frac{m}{p^k} < \frac{n}{p^k}$ y $\frac{n-m}{p^k} < \frac{n}{p^k}$ tenemos que

$$\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-m}{p^k}\right\rfloor = 0, \forall k > \left\lfloor\frac{\log(n)}{\log(p)}\right\rfloor \tag{38}$$

Por útlimo, observemos también que, si $1 \leq k \leq v_p(m)$ entonces $\frac{m}{p^k} \in \mathbb{Z}$ y así

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-m}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left(\frac{m}{p^k} + \left\lfloor \frac{n-m}{p^k} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+(n-m)}{p^k} \right\rfloor = 0 \tag{39}$$

y con todo si denotamos por $t = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \right\rfloor$, tenemos que por (36), (38) y (39)

$$v_p\left(\binom{n}{m}\right) = \sum_{k=v_p(m)+1}^{t} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-m}{p^k} \right\rfloor \underset{(37)}{\leq} \sum_{k=v_p(m)+1}^{t} 1 = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \right\rfloor - v_p(m)$$

■

Proposición 9.16. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ y $[1, \cdots, k]$ el mínimo común múltiplo de $1, \cdots, k$, entonces dado p cualquier primo,*

$$v_p([1, \cdots, k]) = \left\lfloor \frac{\log k}{\log p} \right\rfloor$$

<u>Demostración:</u>
Observemos que si es q un primo cualquiera, entonces $\left\lfloor \frac{\log k}{\log q} \right\rfloor = \lfloor \log_q k \rfloor$, luego es el menor entero tal que

$$q^{\left\lfloor \frac{\log k}{\log q} \right\rfloor} \leq k < q^{\left\lfloor \frac{\log k}{\log q} \right\rfloor + 1}$$

Por tanto, tenemos que

$$[1, \cdots, k] = \prod_{q \leq k} q^{\left\lfloor \frac{\log k}{\log q} \right\rfloor}$$

donde la suma es sobre todos los primos menores a k.
Así, por la proposición 9.12 tenemos que

$$v_p([1, \cdots, k]) = v_p\left(\prod_{q \leq k} q^{\left\lfloor \frac{\log k}{\log q} \right\rfloor}\right) = \sum_{q \leq k} v_p\left(q^{\left\lfloor \frac{\log k}{\log q} \right\rfloor}\right)$$

con lo que, si $p \leq k$ entonces

$$v_p([1, \cdots, k]) = \left\lfloor \frac{\log k}{\log p} \right\rfloor$$

y, si $p > k$ entonces

$$v_p([1, \cdots, k]) = 0 = \left\lfloor \frac{\log k}{\log p} \right\rfloor$$

con lo que, en cualquier caso, se cumple lo deseado. ■

9.5. Detalles omitidos en la demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$

Lema 9.17. *Sean n, k enteros positivos con $n \geq k$ entonces si es C la curva $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ se cumple que*

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+w)^n}{w^{k+1}} \, \mathrm{d}w$$

Demostración:
Recordemos que el teorema de Cauchy para el círculo nos dice que si f es analítica en un abierto conexo Ω y $\bar{B}(z_0, r) \subset \Omega$ entonces

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \, \mathrm{d}w, \forall z \in B(z_0, r)$$

En particular, si tomamos $f(z) = (1+z)^n$ que es claramente entera, tenemos que para $0 \leq k \leq n$ se tiene que, por un lado

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

y por otro

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{(1+w)^n}{w^{k+1}} \, \mathrm{d}w$$

de donde

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+w)^n}{w^{k+1}} \, \mathrm{d}w \qquad \blacksquare$$

Lema 9.18. *Si son a_n, b_n las sucesiones dadas por* (13) *y* (14) *respectivamente, entonces se cumple que*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

Demostración:

Recordemos que consideramos la notación usual $\binom{k}{l} = 0$ si $l > k$ y por tanto,

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n} = \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n} \underset{\substack{l=n-m\\k=j}}{=} \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{j}{n-m}\binom{n}{n-m}\binom{n+m}{n} = \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{j}{n-m}\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} \underset{\substack{m=k\\j=l}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\binom{l}{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque como veremos a continuación,

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\binom{l}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Antes de verlo, observemos que para a_n tenemos que si esta última igualdad es cierta, entonces

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n}c_{n,n-l} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n}c_{n,n-l} = \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{k}{l}\binom{n}{l}\binom{2n-l}{n}c_{n,n-l} \underset{\substack{l=n-m\\k=j}}{=} \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{j}{n-m}\binom{n}{n-m}\binom{n+m}{n}c_{n,m} = \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{j}{n-m}\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}c_{n,m} \underset{\substack{m=k\\j=l}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}c_{n,k}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\binom{l}{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}
\end{aligned}$$

Sin más, por el lema anterior

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2\binom{l}{n-k} = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{l+1}}\,\mathrm{d}z\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{(1+w)^l}{w^{n-k+1}}\,\mathrm{d}w = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=0}^{n}\int_{|z|=1}\left(\frac{(1+z)^n}{z^{l+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\binom{n}{l}\frac{(1+w)^l}{w^{n-k+1}}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{(1+z)^n}{z}\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=0}^{n}\left(\int_{|w|=1}\binom{n}{l}\frac{(1+w)^l}{w^{n-k+1}z^l}\,\mathrm{d}w\right)\right)\mathrm{d}z =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{(1+z)^n}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left(\frac{1}{w^{n-k+1}}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{1+w}{z}\right)^l\right)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{(1+z)^n}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left(\frac{1}{w^{n-k+1}}\left(1+\frac{1+w}{z}\right)^n\right)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{(1+z)^n}{z^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{(1+w+z)^n}{w^{n-k+1}}\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z =$$
$$\underset{\substack{g(s)=\\(1+z+s)^n}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{n+1}}\frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^n}{z^{n+1}}\frac{n!(1+z)^{n-(n-k)}}{(n-k)!(n-(n-k))!}\mathrm{d}z =$$
$$= \binom{n}{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1+z)^{n+k}}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} = \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$ ■

Lema 9.19. *Si son $s_{n,k}$ y $B_{n,k}$ definidos por (25) y (26) respectivamente, entonces se cumple que para cada $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n+1$*

$$B_{n,k} - B_{n,k-1} = s_{n,k}$$

Demostración:

En primer lugar, si es $k = 0$ entonces tenemos por un lado que

$$B_{n,0} - B_{n,-1} = B_{n,0} = -4(2n+1)^3$$

y por otro que

$$s_{n,0} = (n+1)^3 - P(n+1) + n^3 = -4(2n+1)^3$$

luego efectivamente se cumple lo deseado.

Si es $k = n+1$, entonces

$$B_{n,n+1} - B_{n,n} = -B_{n,n} = 4(n+1)(2n+1)^2 b_{n,n}$$

y

$$s_{n,n+1} = (n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}^2 = (n+1)^3\frac{4(2n+1)^2}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}^2 = 4(n+1)(2n+1)^2 b_{n,n}$$

Y, por último, si $0 < k \leq n$, como

$$b_{n-1,k} = \frac{(n-k)^2}{(n+k)^2}b_{n,k} \tag{40}$$

$$b_{n+1,k} = \frac{(n+1+k)^2}{(n+1-k)^2}b_{n,k} \tag{41}$$

$$b_{n,k-1} = \frac{k^4}{(n-k+1)^2(n+k)^2} b_{n,k} \tag{42}$$

se cumple que

$$(B_{n,k} - B_{n,k-1}) - s_{n,k} = (B_{n,k} - B_{n,k-1}) - ((n+1)^3 b_{n+1,k} - P(n+1)b_{n,k} + n^3 b_{n-1,k}) =$$
$$= \left[4(2n+1)\left((2k^2+k-(2n+1)^2) - (2(k-1)^2+(k-1)-(2n+1)^2)\frac{k^4}{(n-k+1)^2(n+k)^2}\right) -\right.$$
$$\left. -(n+1)^3\frac{(n+1+k)^2}{(n+1-k)^2} + P(n+1) - n^3\frac{(n-k)^2}{(n+k)^2}\right] b_{n,k} = \frac{b_{n,k}}{(n+1-k)^2(n+k)^2}$$
$$\left[4(2n+1)\left((2k^2+k-(2n+1)^2)(n+1-k)^2(n+k)^2 - (2(k-1)^2+(k-1)-(2n+1)^2)k^4\right) -\right.$$
$$\left. -(n+1)^3(n+1+k)^2(n+k)^2 + P(n+1)(n+1-k)^2(n+k)^2 - n^3(n-k)^2(n+1-k)^2\right] = 0$$

y concluimos la demostración. ■

Lema 9.20. *Si es $c_{n,k}$ definido por (12) se cumple que para $0 \leq k \leq n-1$*

$$c_{n,k} - c_{n-1,k} = \frac{(-1)^k (k!)^2 (n-k-1)!}{n^2(n+k)!}$$

Demostración:
En primer lugar, tenemos que

$$c_{n,k} - c_{n-1,k} = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} - \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n-1}{m}\binom{n+m-1}{m}} =$$
$$= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3}\left(\frac{(m!)^2(n-m)!n!}{n!(n+m)!} - \frac{(m!)^2(n-m-1)!(n-1)!}{(n-1)!(n+m-1)!}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3}\frac{(m!)^2(n-m-1)!((n-m)-(n+m))}{(n+m)!} =$$
$$= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m((m-1)!)^2(n-m-1)!}{(n+m)!}$$

Además, observemos que si definimos

$$t_{n,m} = \frac{(-1)^m(m!)^2(n-m-1)!}{n^2(n+m)!}$$

entonces

$$t_{n,m} - t_{n,m-1} = \frac{(-1)^m (m!)^2 (n-m-1)!}{n^2(n+m)!} - \frac{(-1)^{m-1}((m-1)!)^2(n-m)!}{n^2(n+m-1)!} =$$
$$= \frac{(-1)^m (m!)^2 (n-m-1)! - (-1)^{m-1}((m-1)!)^2(n-m)!(n+m)}{n^2(n+m)!} =$$
$$= \frac{(-1)^m ((m-1)!)^2 (n-m-1)!(m^2 + (n-m)(n+m))}{n^2(n+m)!} = \frac{(-1)^m((m-1)!)^2(n-m-1)!}{(n+m)!}$$

y así,

$$c_{n,k} - c_{n-1,k} = \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m((m-1)!)^2(n-m-1)!}{(n+m)!} = \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k} t_{n,m} - t_{n,m-1} =$$
$$= \frac{1}{n^3} + t_{n,k} - t_{n,0} = \frac{1}{n^3} + \frac{(-1)^k (k!)^2 (n-k-1)!}{n^2(n+k)!} - \frac{(n-1)!}{n^2 n!} = \frac{(-1)^k (k!)^2 (n-k-1)!}{n^2(n+k)!} \quad \blacksquare$$

Lema 9.21. *Si son $S_{n,k}$ y $A_{n,k}$ definidos por (24) y (27) respectivamente, entonces se cumple que para cada $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n+1$*

$$A_{n,k} - A_{n,k-1} = S_{n,k}$$

Demostración:
En primer lugar, si es $k = 0$ entonces tenemos por un lado que si $n = 1$ entonces

$$S_{1,0} = 2^3 \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) - P(2) = -108$$

y

$$A_{1,0} - A_{1,-1} = A_{1,0} = -4(2 \cdot 1 + 1)^3 = -108$$

mientras que si es $n > 1$ entonces

$$S_{n,0} = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m^3}((n+1)^3 - P(n+1) + n^3) \right) + \left((n+1)^3 \frac{1}{(n+1)^3} - n^3 \frac{1}{n^3} \right) = -4(2n+1)^3 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3}$$

y

$$A_{n,0} - A_{n,-1} = A_{n,0} = B_{n,0} c_{n,0} = -4(2n+1)^3 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3}$$

luego efectivamente se cumple lo deseado.

Si es $k = n+1$, entonces en primer lugar observemos que

$$c_{n,k} - c_{n,k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k^3 \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}} \tag{43}$$

y, aplicando esta igualdad y el lema 9.20 se obtiene que

$$c_{n+1,n+1} - c_{n,n} = (c_{n+1,n+1} - c_{n+1,n}) + (c_{n+1,n} - c_{n,n}) = \frac{(-1)^n}{2(n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)^2}{(n+1)^2(2n+1)!} =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2(n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}} + \frac{(-1)^n 2(n+1)}{(n+1)^4\binom{2(n+1)}{n+1}} = \frac{5}{2}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}}$$

Además, como

$$b_{n+1,n+1} = \frac{4(2n+1)^2}{(n+1)^2} b_{n,n}$$

tenemos que

$$-B_{n,n} = (n+1)^3 b_{n+1,n+1}$$

y finalmente podemos expresar

$$S_{n,n+1} = (n+1)^3 b_{n+1,n+1} c_{n+1,n+1} = -B_{n,n} c_{n+1,n+1} = -B_{n,n} c_{n,n} - B_{n,n}\frac{5}{2}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}} =$$
$$= -B_{n,n}c_{n,n} + (n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}^2 \frac{5}{2}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3\binom{2(n+1)}{n+1}} = -B_{n,n}c_{n,n} + \frac{5}{2}(-1)^n\binom{2(n+1)}{n+1}$$

y

$$A_{n,n+1} - A_{n,n} = -A_{n,n} = -B_{n,n}c_{n,n} - \frac{(-1)^{n-1}5n}{n(n+1)}\binom{2n}{n}(2n+1) =$$
$$-B_{n,n}c_{n,n} + \frac{5(-1)^n}{n+1}\frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2(n+1)}{n+1}(2n+1) = -B_{n,n}c_{n,n} + \frac{5}{2}(-1)^n\binom{2(n+1)}{n+1}$$

con lo que efectivamente, coinciden.

Por último, si $0 < k \leq n$, observemos en primer lugar[17] que por los lemas 9.19 y 9.20,

$$S_{n,k} = (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} + (n+1)^3 b_{n+1,k}(c_{n+1,k} - c_{n,k}) - n^3 b_{n-1,k}(c_{n,k} - c_{n-1,k}) =$$
$$= (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} + (-1)^k(k!)^2\left((n+1)^3 b_{n+1,k}\frac{(n-k)!}{(n+1)^2(n+1+k)!} - n^3 b_{n-1,k}\frac{(n-k-1)!}{n^2(n+k)!}\right) =$$
$$= (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} + (-1)^k(k!)^2 b_{n,k}\left((n+1)\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\frac{n+1+k}{(n+1-k)^2} - n\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\frac{n-k}{(n+k)^2}\right) =$$
$$= (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} + \frac{(-1)^k(k!)^2(n-k)!b_{n,k}}{(n+k)!(n+1-k)^2(n+k)^2}\left(2k^3n + k^3 + 2k^2n + k^2 + 6kn^3 + 9kn^2 + 3kn\right)$$

[17] Si $k = n$, el resultado sigue siendo cierto y se comprueba de igual modo pero partiendo de

$$S_{n,n} = (B_{n,n} - B_{n,n-1})c_{n,n} + (n+1)^3 b_{n+1,n}(c_{n+1,n} - c_{n,n})$$

Así, como

$$A_{n,k} - A_{n,k-1} = (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} +$$
$$+ B_{n,k-1}(c_{n,k} - c_{n,k-1}) + (2n+1)\left(\frac{5(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} - \frac{5(-1)^k(k-1)}{n(n+1)}\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}\right)$$

basta ver que

$$B_{n,k-1}(c_{n,k} - c_{n,k-1}) + (2n+1)\left(\frac{5(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} - \frac{5(-1)^k(k-1)}{n(n+1)}\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^k(k!)^2(n-k)!b_{n,k}}{(n+k)!(n+1-k)^2(n+k)^2}\left(2k^3n + k^3 + 2k^2n + k^2 + 6kn^3 + 9kn^2 + 3kn\right)$$

Sin más, definiendo

$$C_{n,k} = \frac{(-1)^k(k!)^2(n-k)!b_{n,k}}{(n+k)!(n+1-k)^2(n+k)^2}$$

y teniendo en cuenta (42) y (43), se cumple efectivamente que

$$B_{n,k-1}(c_{n,k} - c_{n,k-1}) + (2n+1)\left(\frac{5(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} - \frac{5(-1)^k(k-1)}{n(n+1)}\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}\right) =$$
$$= (-1)^{k-1}(2n+1)\left[4(2(k-1)^2 + k - 1 - (2n+1)^2)b_{n,k-1}\frac{1}{2k^3\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}} +\right.$$
$$\left. + \frac{5k}{n(n+1)}b_{n,k}\frac{1}{\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}} + \frac{5(k-1)}{n(n+1)}b_{n,k-1}\frac{1}{\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}}\right] = (-1)^{k-1}(2n+1)b_{n,k}$$
$$\left[4(2k^2 - 3k + 1 - (2n+1)^2)\frac{k^4}{(n-k+1)^2(n+k)^2}\frac{1}{2k^3\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}} + \frac{5k}{n(n+1)}\frac{1}{\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}} +\right.$$
$$\left. + \frac{5(k-1)}{n(n+1)}\frac{k^4}{(n-k+1)^2(n+k)^2}\frac{1}{\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{k-1}}\right] = (-1)^{k-1}(2n+1)b_{n,k}$$
$$\left[(2k^2 - 3k + 1 - (2n+1)^2)\frac{2k}{(n-k+1)^2(n+k)^2}\frac{(n-k)!(k!)^2}{(n+k)!} + \frac{5k}{n(n+1)}\frac{(n-k)!(k!)^2}{(n+k)!} +\right.$$
$$\left. + \frac{5(k-1)}{n(n+1)}\frac{k^4}{(n-k+1)^2(n+k)^2}\frac{(n-k+1)!((k-1)!)^2}{(n+k-1)!}\right] = (-1)^{k-1}(2n+1)b_{n,k}$$
$$\left[(2k^2 - 3k + 1 - (2n+1)^2)\frac{2k}{(n-k+1)^2(n+k)^2}(k!)^2\frac{(n-k)!}{(n+k)!} + \frac{5k}{n(n+1)}(k!)^2\frac{(n-k)!}{(n+k)!} +\right.$$
$$\left. + \frac{5(k-1)}{n(n+1)}\frac{k^2}{(n-k+1)(n+k)}(k!)^2\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right] = C_{n,k}(-2n-1)$$
$$\left[(2k^2 - 3k + 1 - (2n+1)^2)2k + \frac{5k}{n(n+1)}(n+1-k)^2(n+k)^2 + \frac{5(k-1)}{n(n+1)}k^2(n+1-k)(n+k)\right] =$$

$$= C_{n,k}(-2n-1)\left[4k^3 - 6k^2 + 2k - 8kn^2 - 8kn - 2k + \frac{5}{n(n+1)}[(k^5 - 2k^4 - 2k^3n^2 - 2k^3n + k^3 + \right.$$
$$\left. +2k^2n^2 + 2k^2n + kn^4 + 2kn^3 + kn^2) + (-k^5 + 2k^4 + k^3n^2 + k^3n - k^3 - k^2n^2 - k^2n)]\right] =$$
$$= C_{n,k}(-2n-1)\left(4k^3 - 6k^2 - 8kn^2 - 8kn + \frac{5}{n+1}((n+1)(-k^3+k^2) + nk(n+1)^2)\right) =$$
$$= C_{n,k}(-2n-1)(4k^3 - 6k^2 - 8kn^2 - 8kn - 5k^3 + 5k^2 + 5kn^2 + 5kn) =$$
$$= C_{n,k}(-2n-1)(-k^3 - k^2 - 3kn^2 - 3kn) = C_{n,k}(2k^3n + k^3 + 2k^2n + k^2 + 6kn^3 + 9kn^2 + 3kn)$$

lo que concluye la demostración. ■

Referencias

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Sixth Edition, Springer, 2018.

[2] Herbert Amann, Joachim Escher: *Analysis I*, Birkhäuser, 2005.

[3] Roger Apéry: *Irrationalité de $\zeta 2$ et $\zeta 3$*, Astérisque, 61, 11-13, 1979.

[4] Tom M. Apostol: *A proof that Euler missed: Evaluating $\zeta(2)$ the easy way*, The Mathematical Intelligencer, 5 (3), 59-60, 1983.

[5] Robert B. Ash, W. P. Novinger: *Complex variables*, Second Edition, Dover Publications, 1971.

[6] F. Beukers: *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bulletin of the London Mathematical Society, 11, 268-272, 1979.

[7] Ralph Philip Boas Jr.: *Entire functions*, Academic Press, 1954.

[8] Augustin-Louis Cauchy: *Cours d'analyse de l'ecole royale polytechnique*, de Bure, Paris, 1821.

[9] Boo Rim Choe: *An elementary proof of $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$*, The American Mathematical Monthly, 94 (7), 662-663, 1987.

[10] Henri Cohen: *Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'aprés R. Apery)*, Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, 6, exp. nº6, 1-9, 1977-1978.

[11] John B. Conway: *Functions of one complex variable I*, Springer, 1978.

[12] Daniel Daners: *A short elementary proof of $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$*, Mathematics Magazine, 85 (5), 361-364, 2012.

[13] Leonhard Euler: *De summatione innumerabilium progressionum*, Comentarii Academiae Scientarium Petropolitanae, 6, 1738.

[14] Leonhard Euler: *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae, 7, 1740.

[15] Leonhard Euler: *Demonstration de la somme de cette suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc.*, Journ. lit. d'Allemange, de Suisse et du Nord, 2 (1), 115-127, 1743.

[16] Leonhard Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primus, Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8., Lausanne 1748.
En inglés: *Introduction to Analysis of the Infinite, Book I* (traducido por J. D. Blanton) Springer-Verlag, 1988.

[17] Leonhard Euler: *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, 1755.

[18] Eberhard Freitag, Rolf Busam: *Complex analysis*, Second Edition, Springer, 2009.

[19] Philip E. Gibbs: *"Crackpots" Who Were Right II*, Prespacetime Journal, 1 (3), 489-497, 2010.

[20] Roger Godement: *Analysis II*, Springer, 2005.

[21] Rafael Granero Belinchón: *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*, La Gaceta de la RSME, 12 (4), 721-737, 2009.

[22] Godfrey H. Hardy, Edward M. Wright, David R. Heath-Brown, Joseph H. Silverman: *An introduction to the theory of numbers*, Sixth Edition, OUP Oxford, 2009.

[23] Dirk Huylebrouck: *Similarities in irrationality proofs for* $\pi, \ln 2, \zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, The American Mathematical Monthly, 108 (3), 222-231, 2001.

[24] Hua Loo Keng: *Introduction to number theory*, Springer-Verlag, 1982.

[25] Serge Lang: *Complex analysis*, Fourth Edition, Springer, 1999.

[26] Samuel G. Moreno: *A one-sentence and truly elementary proof of the Basel problem*, arXiv:1502.07667v1.

[27] Luigi Pace: *Probabilistically proving that* $\zeta(2) = \pi^2/6$, The American Mathematical Monthly, 118 (7), 641-643, 2011.

[28] M. Prévost: *A new proof of the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$ *using Padé approximants*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 67, 219-235, 1996.

[29] Alfred van der Poorten: *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, The Mathematical Intelligencer, 1 (4), 195–203, 1979.

[30] Tanguy Rivoal: *La fonction zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entier impairs*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 331 (4), 267-270, 2000.

[31] Tanguy Rivoal: *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5)$, $\zeta(7), \cdots, \zeta(21)$, Acta Arithmetica, 103 (2), 157-167, 2002.

[32] José Manuel Sánchez Muñoz: *El Problema de Basilea*, Lecturas Matemáticas, 35 (2), 199-228, 2014.

[33] C. Edward Sandifer: *Euler's solution of the Basel problem - The longer story*, Euler at 300: An appreciation, MMA, 105-117, 2005.

[34] Zurab K. Silagadze: *The Basel problem: A physicist's solution*, The Mathematical Intelligencer, 41 (3), 14-18, 2019.

[35] Elias M. Stein, Rami Shakarchi: *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis, No. 2, Princeton University Press, 2003.

[36] Terence Tao: *Analysis I*, Third Edition, Hindustan Book Agency/Springer, 2016.

[37] Terence Tao: *Analysis II*, Third Edition, Hindustan Book Agency/Springer, 2016.

[38] Juan Luis Varona Malumbres: *Recorridos por la teoría de números*, Electolibris, 2014.

[39] Karl Weierstrass: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Mathematische Werke, 2, 77-124, 1876.

[40] Wadim Zudilin: *Apery's theorem. Thirty years after*, International Journal of Mathematics and Computer Science, 4 (1), 9-19, 2009.

[41] Wadim Zudilin: *One of the numbers* $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *is irrational*, Russian Mathematical Surveys, 56 (4), 774-776, 2001.